01

Синхронизация связанных автогенераторов Ван-дер-Поля и Кислова–Дмитриева

© Ю.П. Емельянова, А.П. Кузнецов

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
410019 Саратов, Россия
e-mail: yuliaem@gmail.com

(Поступило в Редакцию 6 мая 2010 г. В окончательной редакции 8 октября 2010 г.)

На примере связанных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева рассматривается задача о взаимодействии автоколебательных элементов разной природы. Указаны области различных типов динамики в пространстве параметров, включая возможность широкополосной синхронизации систем. Обсуждается случай существенно разных управляющих параметров. Выявлены эффекты стабилизации хаоса и противоположный эффект — инициированного хаоса — в рассматриваемой системе при различных значениях параметров.

Введение

Задача о динамике двух диссипативно связанных автоколебательных осцилляторов (автогенераторов) является фундаментальной в теории колебаний и нелинейной динамике (см. [1–11] и приведенную там литературу). Основные эффекты, которые демонстрируют такие осцилляторы — это взаимный захват с различным соотношением частот, квазипериодические колебания и эффект гашения („гибели“) колебаний, имеющий место при достаточно большой величине диссипативной связи. Этим режимам отвечают различные области на плоскости параметров (частотная расстройка осцилляторов–величина связи).

Значительная часть литературы посвящена различным аспектам задачи, относящимся к случаю идентичных по параметру возбуждения (т. е. параметру, отвечающему за отрицательное трение) автоколебательных элементов. Сравнительно недавно выяснилось, что случай неидентичных подсистем важен и требует специального дополнительного анализа [11–18]. Такой анализ выявил еще один своеобразный тип поведения, которому на плоскости параметров отвечает область, разделяющая области гибели колебаний и квазипериодической динамики. Если два автогенератора характеризуются значениями параметров, отвечающих за бифуркации Андронова–Хопфа в подсистемах, λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 > \lambda_2$, то такой режим возникает в области значений диссипативной связи $\lambda_1 > \mu > \lambda_2$. При этом синхронизация подсистем возможна при сколь угодно большом значении частотной расстройки. В работах [12–14] для такого режима был предложен термин „режим широкополосной синхронизации“. В этом режиме один из осцилляторов, характеризующийся большим значением управляющего параметра, в определенной мере доминирует. Различные аспекты такого режима обсуждались в работах [12–17]: построены карты динамических режимов на плоскости параметров частотная расстройка–величина связи, исследована эволюция чисел вращения с ростом частотной расстройки, выполнен бифуркационный анализ и т. д. Соответствующая картина наблюдалась в радиофизическом эксперименте [17].

В настоящей статье обращается внимание еще на один аспект проблемы взаимодействия автоколебательных осцилляторов, а именно на ситуацию, когда взаимосвязаны системы разных типов. В картине взаимодействия таких систем можно ожидать появления особенностей, описанных в работах [11–17], характерных именно для неидентичных подсистем. Действительно, каждая из подсистем по отдельности у порога возникновения автоколебаний может быть приведена к нормальной форме бифуркации Андронова–Хопфа, но в типичном случае соответствующие параметры, отвечающие за бифуркации Андронова–Хопфа, оказываются разными. Для реализации случая одинаковых параметров необходимо както специально настраивать разнотипные системы. Более того, если отойти от порога бифуркации, свойства автономной динамики подсистем будут изменяться также по-разному.

Описание взаимодействия разных автоколебательных систем важно как с позиции теории колебаний, так и для возможных приложений. Действительно, многие, например биофизические, процессы должны отвечать взаимодействию различных автоколебательных элементов. Введение связи между разнотипными автогенераторами может представлять интерес и в радиофизике с точки зрения формирования сигнала с более широким спектром свойств и возможностей управления. В этом плане интересной представляется ситуация, когда одна из подсистем может демонстрировать не только простые автоколебания, но и хаос. В настоящей статье в указанном контексте рассматривается задача о взаимодействии системы Ван-дер-Поля [1–4] и генератора Кислова–Дмитриева [19–20], являющихся хорошо известными примерами автоколебательных систем.

1. Автогенераторы Ван-дер-Поля и Кислова–Дмитриева

Осциллятор Ван-дер-Поля является классической моделью теории колебаний, демонстрирующей автоколебания и допускающей радиофизическую реализацию [1–4,18]. Соответствующее уравнение, описывающее динамику осциллятора Ван-дер-Поля, имеет вид:

$$\frac{d^2w}{d^2t} - (\lambda - w^2)\frac{dw}{dt} + (1+\Delta)w = 0. \qquad (1)$$

Здесь w — динамическая переменная, λ — параметр, отвечающий за отрицательное трение и за превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа, Δ — отстройка собственной частоты от единичной.

Физическая система, предложенная В.Я. Кисловым и А.С. Дмитриевым, представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелинейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного элемента [19,20]. Она является системой с запаздывающей обратной связью и может демонстрировать динамический режим хаотических автоколебаний.

Если предположить, что нелинейная характеристика усилителя имеет вид $F(z) = Mz\exp(-z^2)$, то можно получить следующую систему уравнений, описывающую динамику автономного кольцевого генератора Кислова–Дмитриева [19–20]:

$$T\frac{dx}{dt} + x = Mz\exp(-z^2),$$

$$\frac{d^2z}{d^2t} + \frac{1}{Q}\frac{dz}{dt} + z = x. \qquad (2)$$

Здесь x — сигнал на выходе инерционного элемента, z — сигнал на входе усилителя, T — время релаксации инерционного элемента, Q — добротность RLC-фильтра, M — коэффициент усиления.

Автогенератор Кислова–Дмитриева (2) является динамической системой третьего порядка. Поэтому автономный генератор демонстрирует не только автоколебания и отвечающий им предельный цикл в фазовом пространстве, но и удвоение периода этого цикла с переходом к хаосу по сценарию Фейгенбаума, что демонстрирует рис. 1. На рис. 1, a приведено бифуркационное дерево, дающее зависимость переменной z в сечении Пуанкаре $\dot{z} = 0$ от управляющего параметра — коэффициента усиления M. На рис. 1, b–e показаны проекции аттрактора системы на плоскость $(z, \dot{z})$. Можно наблюдать, что при небольших значениях коэффициента усиления имеет место простой „однооборотный“ предельный цикл, который затем претерпевает удвоения периода с возникновением хаоса.

Как было отмечено, для осциллятора Ван-дер-Поля превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа определяется параметром λ. Сделаем оценку превышения над порогом этой бифуркации для генератора Кислова–Дмитриева. Система (2) имеет неподвижную точку в начале координат, потеря устойчивости которой и приводит к возникновению предельного цикла. Если добротность Q и время релаксации инерционного элемента T велики, то из уравнений (2) следует оценка

$$T\frac{dx}{dt} \approx Mz,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z = x. \qquad (3)$$

Для анализа устойчивости неподвижной точки в начале координат полагаем $x, z \propto \exp(i\omega t)$. Тогда из (3) следует

$$\omega^2 - i\frac{M}{\omega T} - 1 = 0. \qquad (4)$$

Из (4) получаем $\omega \approx 1 - i\Lambda$. Подставив это в (4), получим для нарастающего решения

$$\Lambda \approx \frac{M}{2T}. \qquad (5)$$

Этот фактор и определяет превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа генератора Кислова–Дмитриева, при этом частота возникающих колебаний $\omega \approx 1$.

Уравнения резистивно связанных генератора Кислова–Дмитриева и осциллятора (автогенератора) Ван-дер-Поля могут быть записаны в форме:

$$T\frac{dx}{dt} + x = Mz\exp(-z^2),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{Q}\frac{dz}{dt} + z + \mu\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dw}{dt}\right) = x, \qquad (6)$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} - (\lambda - w^2)\frac{dw}{dt} + (1+\Delta)w + \mu\left(\frac{dw}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

где μ — параметр связи.

2. Динамика связанных систем Ван-дер-Поля и Кислова–Дмитриева

Изучим устройство плоскости параметров частотная расстройка–величина связи (Δ, μ) системы (6). Для исследования плоскости параметров будем использовать метод карт динамических режимов [20]. В рамках этого метода численно в каждой точке плоскости параметров определяется тип режима. Для этого строится сечение Пуанкаре системы (6), которое, как известно, представляет собой некоторую поверхность в фазовом пространстве [20]. Поскольку исследуемая система характеризуется пятимерным фазовым пространством, в качестве сечения Пуанкаре будет выступать гиперповерхность, заданная определенным дополнительным условием, например, равенством нулю скорости осциллятора Ван-дер-Поля $\dot{w} = 0$. При этом учитываются траектории, пересекающие секущую поверхность только в одном

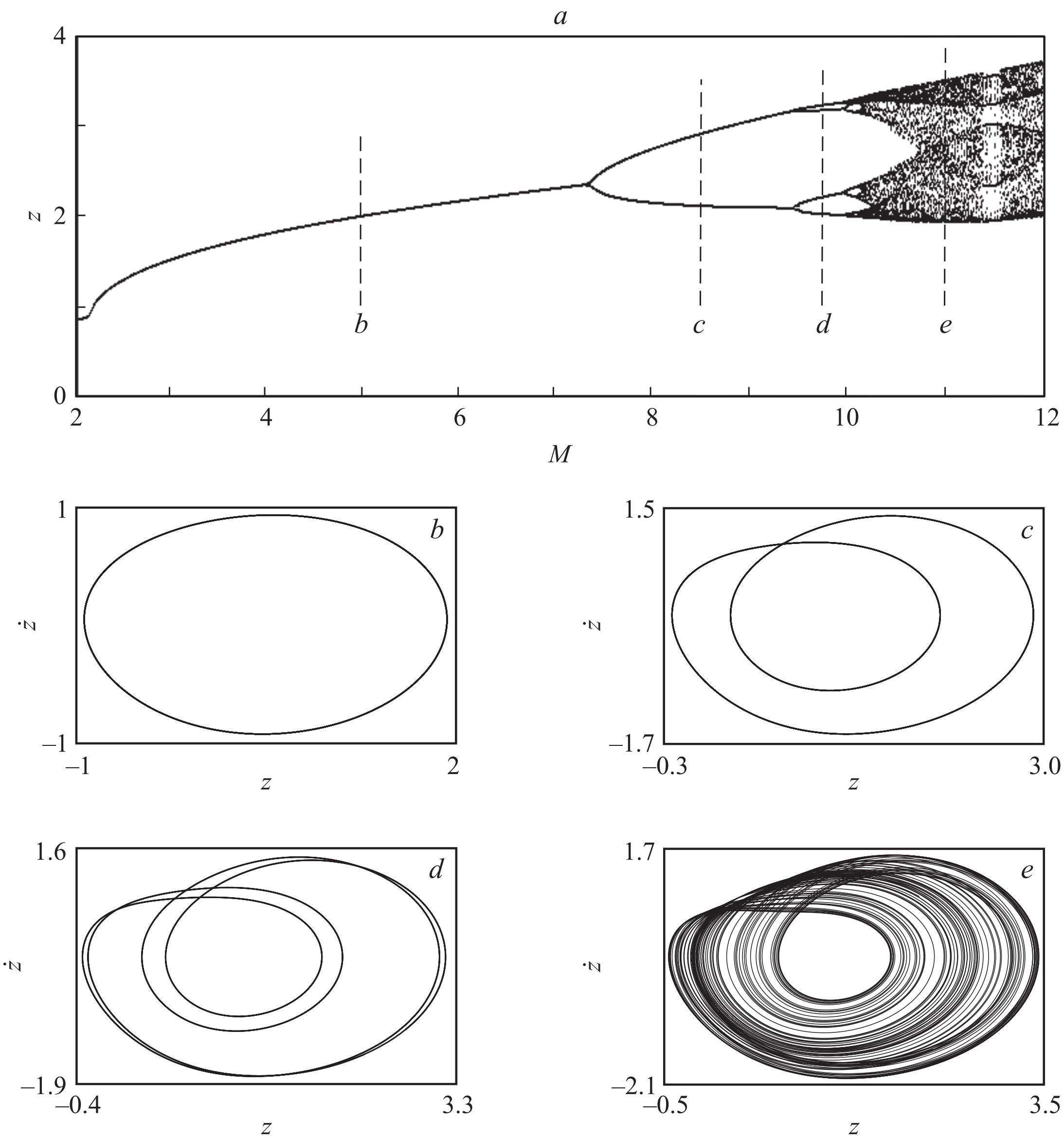

Рис. 1. Бифуркационное дерево автономного генератора Кислова–Дмитриева (2) при $T = 5$, $Q = 10$ (a); фазовые портреты, иллюстрирующие сценарий Фейгенбаума, для значений коэффициента усиления $M = 5$ (b), 8.5 (c), 9.75 (d) и 11 (e).

направлении. В результате этой процедуры исходной дифференциальной системе оказывается сопоставленным некоторое дискретное отображение. После этого численно определяется период цикла этого отображения, и каждая точка плоскости параметров окрашивается в свой оттенок серого цвета в соответствии с определенным таким образом периодом. Для некоторых основных областей периоды циклов в сечении Пуанкаре обозначены цифрами на картах. Квазипериодические и хаотические режимы фиксируются как непериодические и на рисунках обозначены белым цветом.

Выберем значения параметров системы (6). Параметры генератора Кислова–Дмитриева — время задержки T и добротность Q — положим равными $T = 5$, $Q = 10$, а коэффициент усиления M будем менять так, чтобы система переходила из автоколебательного режима с простейшим предельным циклом (рис. $1, b$) в хаотический (рис.$1, e$). Выберем управляющий параметр осциллятора Ван-дер-Поля $\lambda = 1$.

Пусть сначала $M = 5$. В этом случае генератор Кислова–Дмитриева демонстрирует простейший однооборотный предельный цикл (рис. $1, b$). В соответствии с оценкой (5) превышение над порогом бифуркации Андронова–Хопфа можно оценить как $\Lambda \approx 0.5$. Поскольку управляющий параметр осциллятора Ван-дер-Поля $\lambda = 1$, то $\lambda > \Lambda$ и можно ожидать, что осциллятор Ван-дер-Поля будет доминировать.

На рис. 2 приведена карта динамических режимов системы (6) для указанных значений параметров, представлены примеры фазовых портретов на плоскости переменных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева. Можно видеть характерную карти-

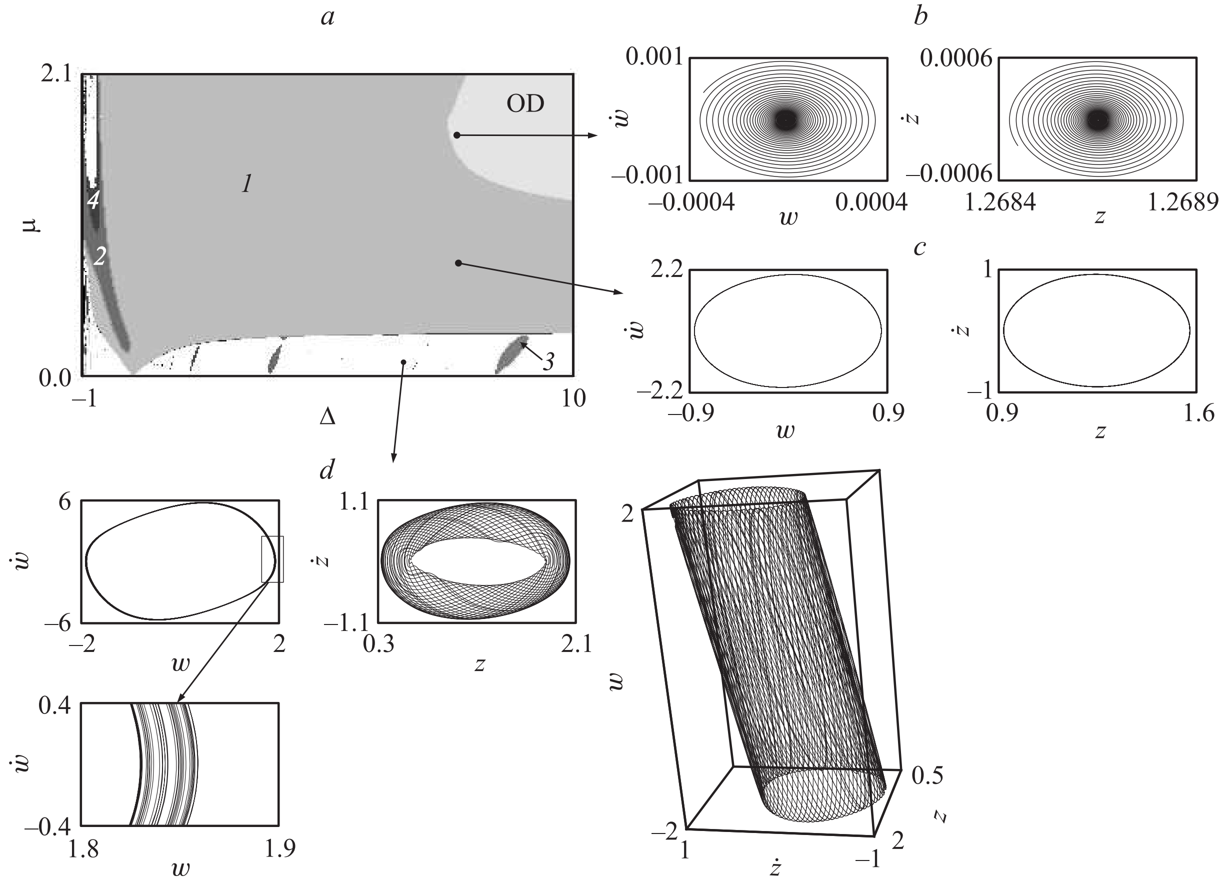

Рис. 2. Карта динамических режимов связанных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева (6) на плоскости частотная расстройка–величина связи (a); характерные фазовые портреты (b–d). На рис. d дан трехмерный фазовый портрет системы в пространстве $(z, \dot{z}, w)$. Значения параметров $\lambda = 1$, $M = 5$, $T = 5$, $Q = 10$. OD — область гибели колебаний.

ну синхронизации неидентичных автоколебательных систем [11–17]. Проведем ее обсуждение при постепенном уменьшении величины связи для достаточно большой положительной величины частотной расстройки осцилляторов.

В области большой связи, когда связь настолько велика, что подавляет колебания обоих осцилляторов, имеет место область гибели колебаний (рис. 2, b). Нижняя граница этой области отвечает величине связи, равной значению управляющего параметра наиболее возбужденного осциллятора: $\mu \approx \lambda = 1$. Ниже располагается область широкополосной синхронизации [11–17], обозначенная на карте (рис. 2, a) как область периода *1*. Характерные фазовые портреты для такого режима представлены на рис. 2, c. В этом случае фазовые портреты обоих осцилляторов выглядят как простейшие предельные циклы, причем захваченные частоты относятся как 1 : 1.

Нижняя граница области широкополосной синхронизации отвечает порогу режима гашения колебаний генератора Кислова–Дмитриева за счет соответствующей величины диссипативной связи: $\mu \approx \Lambda \approx 0.5$. При еще меньшей величине связи имеют место квазипериодические режимы со встроенной системой узких языков Арнольда. На фазовых портретах в этом случае доминирует осциллятор Ван-дер-Поля: его автономный аттрактор слабо возмущен, в отличие от аттрактора генератора Кислова–Дмитриева (рис. 2, d). Тем не менее заметим, что увеличенный фрагмент орбиты осциллятора Ван-дер-Поля демонстрирует структуру, характерную для квазипериодической динамики. Квазипериодический характер динамики системы иллюстрирует трехмерный фазовый портрет, для которого пара переменных генератора Кислова–Дмитриева дополнена переменной осциллятора Ван-дер-Поля. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 2, d справа и демонстрирует характерную „цилиндрическую структуру“.

Отметим также возможность удвоений периода с ростом величины связи при отрицательной частотной расстройке осцилляторов, что видно из левой части карты на рис. 2, a, когда частота осциллятора Ван-дер-Поля меньше частоты генератора Кислова–Дмитриева.

Увеличим теперь коэффициент усиления до значения $M = 11$, при котором автономный генератор Кислова–Дмитриева демонстрирует хаотический режим. Соответствующая карта для связанных систем в этом случае представлена на рис. 3, a. Фазовые портреты в различных точках плоскости параметров показаны на рис. 3, b–g. Серия рис. 3, d,c,b иллюстрирует воз-

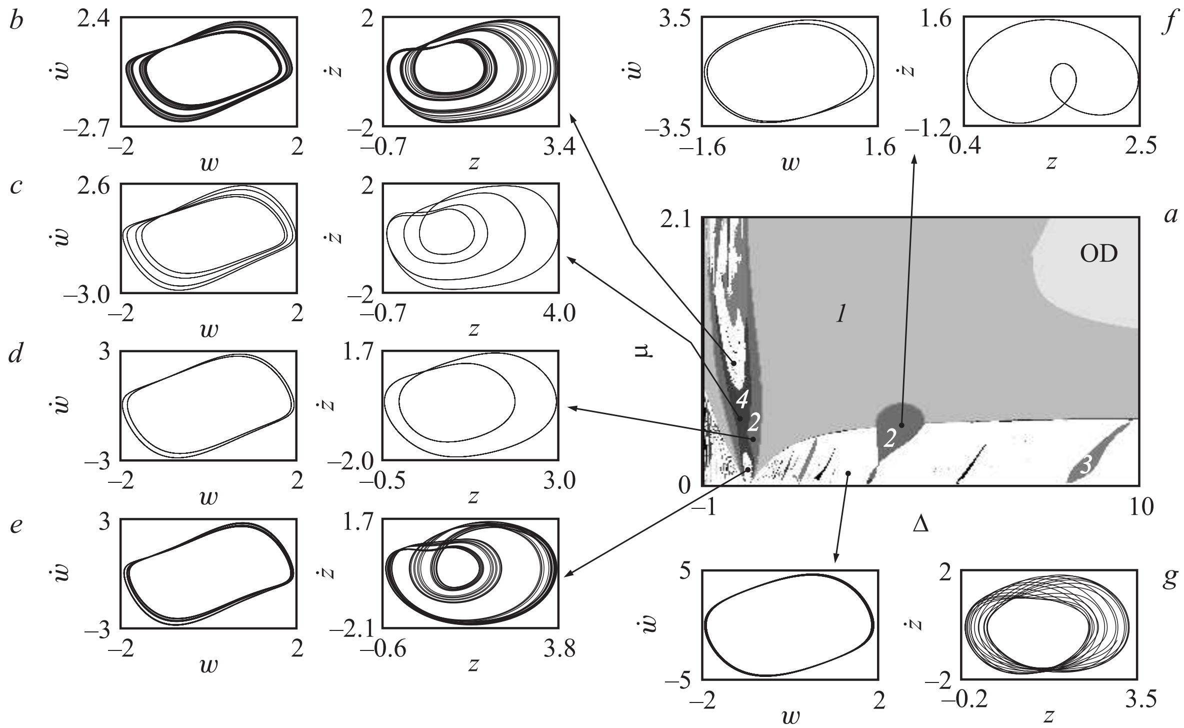

Рис. 3. Карта динамических режимов связанных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева (6) на плоскости частотная расстройка–величина связи (a); характерные фазовые портреты —(b–g). Значения параметров $\lambda = 1$, $M = 11$, $T = 5$, $Q = 10$.

можность удвоений периода и переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума с ростом связи в области отрицательных частотных расстроек. Однако в отличие от случая простых автоколебаний в автономной системе Кислова–Дмитриева теперь удвоения периода могут наблюдаться и при уменьшении уровня связи, что иллюстрируют рис. 3, d,e. Это понятно: при „выключении“ связи проявляются свойства хаотического режима автономной системы Кислова–Дмитриева. Хаотическая динамика автономной системы приводит также к тому, что все языки (окна периодических режимов) у своих оснований в области малой связи разрушены.

Из рассмотрения карты режимов и фазовых портретов на рис. 3 можно сделать вывод, что взаимодействие двух систем стабилизирует хаотическую динамику генератора Кислова–Дмитриева. Этот эффект проявляется явным образом не только как возможность периодических режимов, но и как модификация хаотических. Действительно, если сравнить аттрактор автономной системы на рис. 1, e и хаотические аттракторы на рис. 3, b,e,f, то можно констатировать, что взаимодействие осцилляторов уменьшает хаотическую компоненту движения. При этом осцилляторы на рис. 3, b–e примерно равноправны, поскольку нами повышена степень возбуждения генератора Кислова–Дмитриева. Однако при увеличении частоты осциллятора Ван-дер-Поля проявляется его доминирование. Так, на рис. 3, g видно, что характерная многоленточная структура аттрактора Кислова–Дмитриева разрушается за счет взаимодействия. На рис. 3, f двухоборотный цикл генератора Кислова–Дмитриева также выглядит существенно иначе, чем на рис. 3, d. Его вид теперь отвечает характерной ситуации возникновения петель у ведомого осциллятора [11–17].

Структура языков Арнольда оказывается значительно сильнее разрушенной, если уменьшить параметр задержки в цепи обратной связи T. Соответствующая карта динамических режимов для $T = 2$ показана на рис. 4, a при значении параметра усиления $M = 11$, что отвечает хаотическому режиму. Можно видеть, что область отрицательных частотных расстроек и область

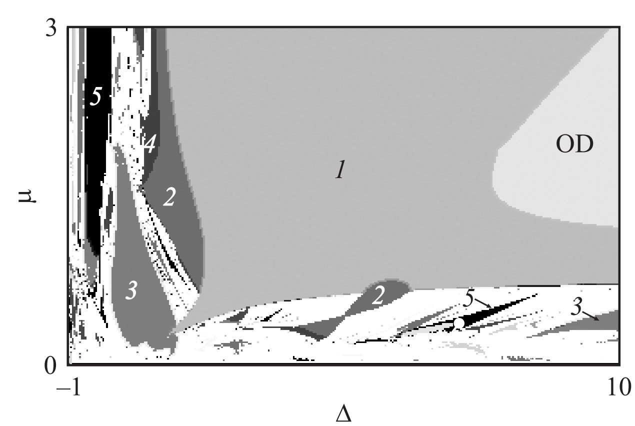

Рис. 4. Карта динамических режимов связанных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева (6) при $\lambda = 1$, $M = 11$, $T = 2$, $Q = 10$.

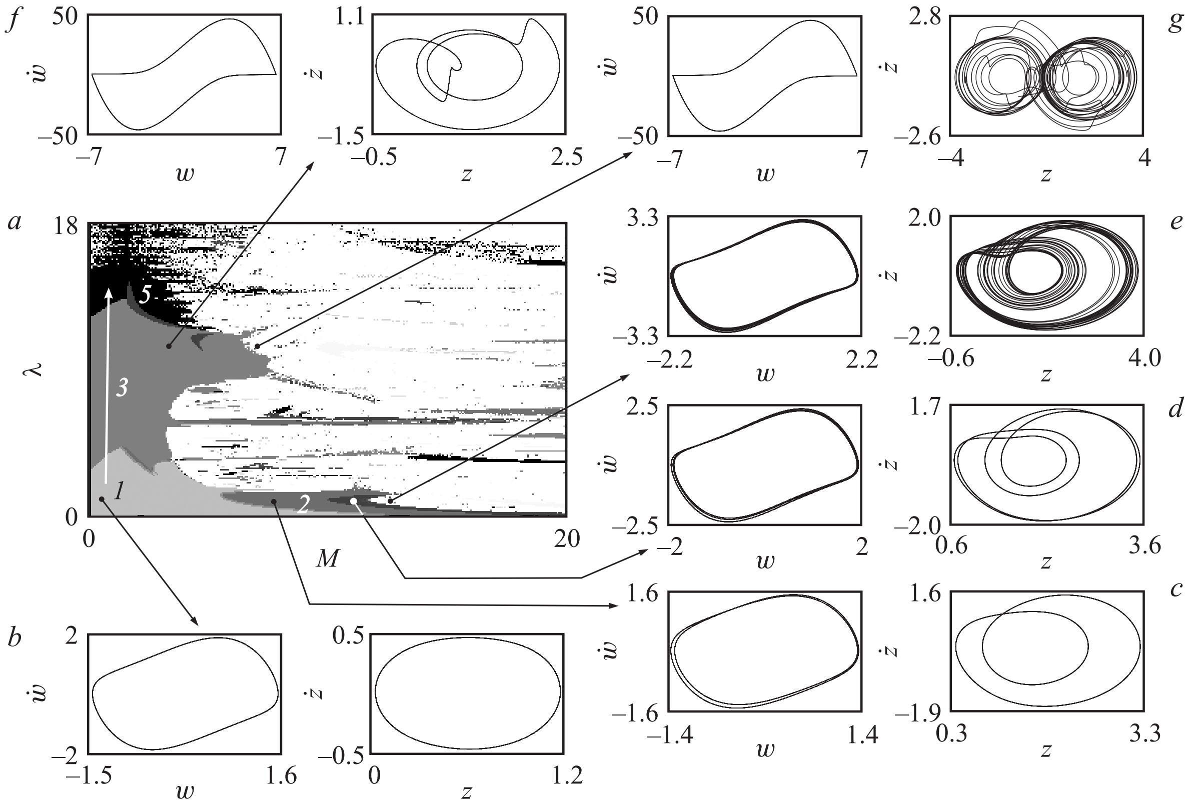

Рис. 5. Карта динамических режимов связанных осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева (6) на плоскости управляющих параметров подсистем (*a*); характерные фазовые портреты —(*b*–*g*). Значения параметров $\Delta = 0$, $\mu = 0.1$, $T = 5$, $Q = 10$.

ниже режима широкополосной синхронизации заметно модифицируются (ср. рис. 4, *a* с рис. 2, *a* и рис. 3, *a*). В то же время даже в этом случае имеет место обширная область основной синхронизации периода *1* и область широкополосной синхронизации, которая оказывается, таким образом, очень грубой по отношению к различным изменениям параметров системы.

При анализе взаимодействующих автоколебательных осцилляторов, как правило, исследовалась плоскость параметров частотная расстройка–величина связи. Для рассматриваемой системы интересные особенности поведения можно обнаружить, обратившись к плоскости управляющих параметров осцилляторов (M, λ), приведенной на рис. 5, *a*. Зафиксируем сначала небольшое значение параметра осциллятора Ван-дер-Поля λ и будем увеличивать управляющий параметр M генератора Кислова–Дмитриева, наблюдая эволюцию фазовых портретов, представленную на рис. 5, *b*–*e*. В этом случае осциллятор Ван-дер-Поля возбужден слабо, и генератор Кислова–Дмитриева в объединенной системе демонстрирует удвоения периода и переход к хаосу по Фейгенбауму с ростом коэффициента усиления. При этом порог возникновения хаоса примерно равен значению $M \approx 10$, отвечающему возникновению хаоса в автономной системе.

Теперь, наоборот, зафиксируем небольшое значение коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева и будем увеличивать (заметным образом) управляющий параметр осциллятора Ван-дер-Поля. Соответствующий маршрут показан стрелкой на рис. 5, *a*, а фазовые портреты представлены на рис. 6. В этом случае будет доминировать осциллятор Ван-дер-Поля (см. масштабы по осям координат на фазовых портретах рис. 6). Несколько неожиданной оказывается эволюция аттрактора генератора Кислова–Дмитриева. Для него на рис. 6 наблюдается увеличение числа петель, характерное для ведомого осциллятора, хотя величина частотной расстройки теперь фиксирована.

Причина наблюдаемого эффекта состоит в том, что при столь заметном (до 10 и выше) увеличении управляющего параметра автономный осциллятор Ван-дер-Поля становится существенно неизохронным. Его колебания оказываются релаксационными, а их период заметно возрастает с ростом управляющего параметра [19], что и приводт к соответствующему изменению вида аттрактора ведомого осциллятора в результате наложения на его быстрые колебания инициированных осциллятором Ван-дер-Поля колебаний большего периода (рис. 6, *b*).

Отметим, что увеличение коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева в случае таких неизохронных колебаний (большие λ) приводит к хаосу в связанной системе, однако вид аттрактора существенно отличается от автономного, что иллюстрируют рис. 5, *f* и *g*. Это интересный пример того, что хаос может быть

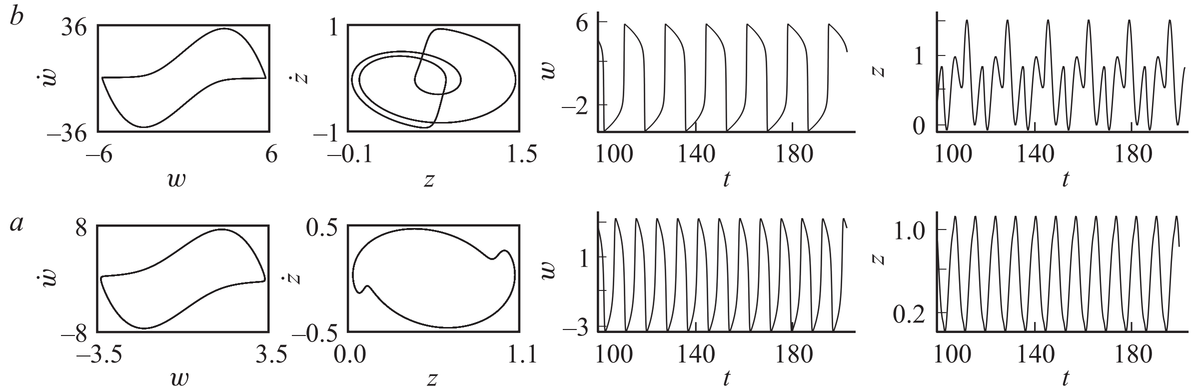

Рис. 6. В левой колонке: характерные фазовые портреты осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева при движении по маршруту, показанному стрелкой на рис. 5,*a* внутри областей синхронизации периода *1* (*b*) и *3* (*f*). В правой колонке: реализация осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева. Значения параметров $\Delta = 0$, $\mu = 0.1$, $t = 5$, $Q = 10$.

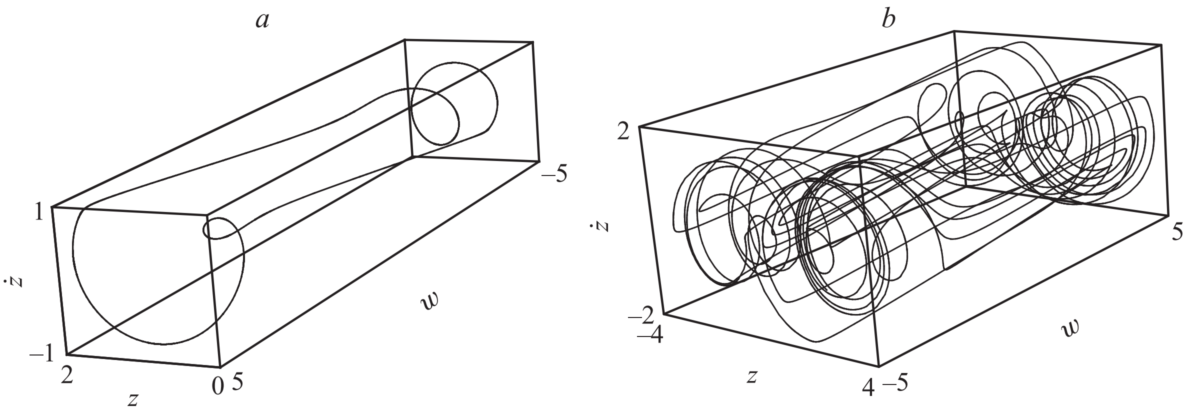

Рис. 7. Трехмерные фазовые портреты системы (6) в пространстве $(z, \dot{z}, w)$, иллюстрирующие возникновение инициированного хаоса.

инициирован ведомым осциллятором, однако при этом тип хаотического режима не отвечает его автономной динамике. Существенно, что порог возникновения такого хаоса колеблется около значений коэффициента усиления M примерно от 3 до 7, т.е. заметно меньше, чем порог в автономной системе. Таким образом, взаимодействие разнотипных систем может не только стабилизировать хаос, что наблюдалось при обсуждении рис. 3, но и наоборот, инициировать хаос за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе, если управляющие параметры систем существенно отличаются.

Трехмерные фазовые портреты системы (6) в пространстве $(z, \dot{z}, w)$, иллюстрирующие возникновение такого инициированного хаоса, приведены на рис. 7. Рис. 7,*a* отвечает ситуации, когда коэффициент усиления M еще не очень велик и колебания регулярны. При этом хорошо видно, что на стадиях медленных движений фазовая траектория в плоскости $(z, \dot{z})$ успевает сделать один-два оборота, а затем следуют „переключения“ осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося в режиме релаксационных колебаний. Если увеличить коэффициент усиления M, то в промежутке между переключениями фазовая траектория генератора Кислова–Дмитриева делает несколько оборотов (рис. 7,*b*). В результате наложенные на эту динамику переключения релаксационного осциллятора Ван-дер-Поля дают хаотическую траекторию (рис. 7,*b*).

Заключение

На примере связанных автоколебательных систем — осциллятора Ван-дер-Поля и генератора Кислова–Дмитриева — показано, что при диссипативной связи разнотипных систем оказываются характерными режимы гибели колебаний, широкополосной синхронизации и квазипериодических колебаний со встроенной системой языков Арнольда. Каждому из них на плоскости (частотная расстройка)–(величина связи) отвечают определенные области. Картина этих областей оказывается грубой по отношению к изменению параметров и может наблюдаться, даже если автономная динамика генератора Кислова–Дмитриева хаотическая. Однако в последнем случае основания языков синхронизации при малой связи разрушаются с возникновением областей удвоенного периода и хаоса.

Взаимодействие автоколебательных осцилляторов стабилизирует хаотическую динамику генератора Кислова–Дмитриева. Этот эффект проявляется явным образом не только как возможность периодических режимов, но и как модификация хаотических, когда взаимодействие уменьшает хаотическую компоненту аттрактора по сравнению с автономной системой.

Если управляющий параметр осциллятора Ван-дер-Поля очень большой, то может возникать режим доминирования этого осциллятора. При этом с ростом управляющего параметра осциллятора Ван-дер-Поля аттрактор генератора Кислова–Дмитриева демонстрирует увеличение числа петель. Причина такого эффекта состоит в неизохронности колебаний осциллятора Ван-дер-Поля при больших значениях управляющего параметра, что приводит к заметному увеличению периода его колебаний. В динамике ведомого осциллятора это проявляется в виде наложения этих медленных колебаний на движение с собственной частотой. С другой стороны, в такой системе с ростом коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева возникает специфический хаотический режим, когда вид хаотического аттрактора отличается от автономного. При этом порог возникновения хаотического режима существенно меньше, чем порог хаоса в автономной системе. В этом случае сложная структура аттрактора возникает за счет действия ведущего осциллятора в форме „переключений" между режимами, возникающими при переходе от одной медленной стадии релаксационного осциллятора Ван-дер-Поля к другой. Небольшое увеличение коэффициента усиления генератора Кислова–Дмитриева приводит к хаосу, также включающему стадии „переключений". Таким образом, взаимодействие разнотипных систем может не только стабилизировать хаос, но и наоборот, инициировать его за счет возникновения сложной динамики в ведомом осцилляторе, если управляющие параметры систем существенно отличаются.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-02-00707 и гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1./1738.

Список литературы

[1] *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с.
[2] *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 496 с.
[3] *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. Физматлит, 1980. 360 с.
[4] *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука. Физматлит, 1981. 351 с.
[5] *Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N.* // Physical D. 1990. Vol. 41. P. 403.
[6] *Rand R., Holmes P.J.* // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1980. Vol. 15. P. 387.
[7] *Storti D.W., Rand R.H.* // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1982. Vol. 17. N 3. P. 143.
[8] *Chakraborty T., Rand R.H.* // Int. J. Non-Linear Mechanics. 1988. Vol. 23. N 5/6. P. 369.
[9] *Pastor I., Perez-Garcia V.M., Encinas-Sanz F., Guerra J.M.* // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48. P. 171.
[10] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11. № 6. С. 48.
[11] *Ivanchenko M.V., Osipov G.V., Shalfeev B.D., Kurths J.* // Physica D. 2004. Vol. 189. № 1–2. P. 8.
[12] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* // Письма в ЖЭТФ. 2007. Т. 33. Вып. 15. С. 15.
[13] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И., Роман Ю.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15. № 4. С. 3
[14] *Kuznetsov A.P., Roman Ju.P.* // Physica D. 2009. Vol. 238. N 16. P. 1499.
[15] *Астахов В.В., Коблянский С.А., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Успехи современной радиоэлектроники. 2008. Вып. 9. С. 61.
[16] *Астахов В.В., Коблянский С.А., Шабунин А.В.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Принята в печать.
[17] *Кузнецов А.П., Емельянова Ю.П., Селезнев Е.П.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. № 2. С. 67.
[18] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
[19] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука. Физматлит, 1989. 280 с.
[20] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.