Журнал технической физики, 2011, том 81, вып. 3

01;03

Достаточные условия линейной длинноволновой неустойчивости установившихся осесимметричных течений идеальной жидкости со свободной границей в азимутальном магнитном поле

© Ю.Г. Губарев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: gubarev@hydro.nsc.ru

(Поступило в Редакцию 6 мая 2010 г. В окончательной редакции 10 августа 2010 г.)

Исследуется задача линейной устойчивости стационарных осесимметричных струйных сдвиговых течений невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и „вмороженным" азимутальным магнитным полем. Прямым методом Ляпунова получены достаточные условия как теоретической (на полубесконечных интервалах времени), так и практической (на конечных временных промежутках) неустойчивости этих течений по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям. В случае, когда данные условия и теоретической, и практической неустойчивости справедливы, построена априорная оценка снизу, свидетельствующая об экспоненциальном (как минимум) нарастании по времени изучаемых малых возмущений. Кроме того, сконструирован иллюстративный аналитический пример рассматриваемых установившихся течений и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений, которые растут во времени согласно построенной оценке.

Введение

Предлагаемая статья посвящена проблеме магнитогидродинамической (МГД) устойчивости и токового разрушения жидких проводящих струй. Актуальность этой проблемы обусловлена тем, что струйные МГД-течения интенсивно применяются в целом ряде значимых разделов науки и отраслей промышленности (например, в физике плазмы [1,2], порошковой металлургии [3,4], электрофизике [5–7], машиностроении [8–10], астрофизике [11–13] и т.д.).

Несмотря на то что в области изучения МГД-устойчивости и механизмов токового разрушения жидких проводящих струй достигнуты впечатляющие результаты [1–13], главный вопрос — управление струйными МГД-течениями в режиме реального времени — до сих пор остается открытым и еще только ждет своего разрешения.

В настоящей работе развивается новый оригинальный подход [14–18], позволяющий ощутимо продвинуться по пути создания конструктивной методики управления жидкими проводящими струями при наличии магнитного поля и в режиме реального времени.

Суть этого подхода заключается в построении на регулярной основе функционалов Ляпунова [19,20], которые обладают способностью нарастать со временем в силу тех либо других смешанных задач, чьи решения описывают эволюцию малых возмущений рассматриваемых стационарных течений жидкостей и газов. С помощью настоящего алгоритма конструирования растущих во времени функционалов Ляпунова получается устанавливать достаточные условия теоретической [19,20] и практической [21,22] линейной неустойчивости, строить априорные экспоненциальные нижние оценки и доказывать существование начальных данных для нарастающих со временем малых возмущений.

Важно, что именно достаточные условия практической линейной неустойчивости и могут послужить теоретическим фундаментом для разработки конструктивной методики управления струйными МГД-течениями в режиме реального времени.

Формулировка задачи

Исследуется неограниченно длинная цилиндрическая струя однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью, расположенная в безграничном пространстве [14,16,23,24]. Считается, что в вещество струи „вморожено" азимутальное магнитное поле, а по ее свободной поверхности течет продольный постоянный электрический ток, который создает в окружающем изучаемую струю открытом бесконечном пространстве квазистационарное азимутальное магнитное поле. Более того, предполагается, что рассматриваемые МГД-течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости с неограниченной проводимостью осесимметричны, при этом азимутальный компонент ее поля скорости тождественно равен нулю. Наконец, считается, что действие сил поверхностного натяжения на свободной границе проводящей струи можно не учитывать.

Согласно принятым выше предположениям, система уравнений одножидкостной бездиссипативной магнитной гидродинамики [25] запишется в виде

$$\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial z^*}\right)+\frac{H_2^2}{4\pi r^*}=-\frac{\partial P_*}{\partial r^*},$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial v_3}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P_*}{\partial z^*},$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t^*}+v_1\frac{\partial H_2}{\partial r^*}+v_3\frac{\partial H_2}{\partial z^*}-\frac{v_1H_2}{r^*}=0,$$

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial(v_1r^*)}{\partial r^*}+\frac{\partial v_3}{\partial z^*}=0, \tag{1}$$

где $\rho\equiv\text{const}$ — поле плотности; v_1, v_3 — радиальная и осевая составляющие поля скорости; H_2 — азимутальный компонент магнитного поля внутри исследуемой струи; $P_*\equiv P+H_2^2/8\pi$ — модифицированное поле давления; P — поле давления; t^* — время; r^*, z^* — цилиндрические координаты. Считается, что ось z^* цилиндрической системы координат совпадает с осью симметрии проводящей струи.

Азимутальная составляющая магнитного поля H_2^* снаружи изучаемой струи, в пренебрежении током смещения, определяется формулой

$$H_2^*=\frac{2J}{cr^*}. \tag{2}$$

Здесь $J\equiv\text{const}$ — поверхностный продольный электрический ток, c — скорость света.

На оси симметрии проводяющей струи и ее свободной границе ставятся следующие краевые условия:

$$v_1=0,\quad \left|\frac{H_2}{r^*}\right|<+\infty\quad (r^*=0);$$

$$P_*=\frac{H_2^{*2}}{8\pi},\quad v_1=\frac{\partial r_1}{\partial t^*}+v_3\frac{\partial r_1}{\partial z^*}\quad \big(r^*=r_1(t^*,z^*)\big). \tag{3}$$

Начальные данные для первых трех соотношений системы (1) и последнего из граничных условий (3) берутся в виде

$$v_1(0,r^*,z^*)=v_{10}(r^*,z^*),\quad v_3(0,r^*,z^*)=v_{30}(r^*,z^*),$$

$$H_2(0,r^*,z^*)=H_{20}(r^*,z^*),\quad r_1(0,z^*)=r_{10}(z^*), \tag{4}$$

причем от функций v_{10}, v_{30}, H_{20} и r_{10} требуется, чтобы они не противоречили четвертому уравнению системы (1) и первым трем из соотношений (3).

С точки зрения физики смешанная задача (1)–(4) моделирует струйное течение плазмы в рамках гидродинамического описания. В соответствии с этим описанием движение плазмы в струе может быть истолковано в качестве электрического тока, индуцирующего внутреннее азимутальное магнитное поле. Данное магнитное поле, во-первых, неоднородно по поперечному сечению струи (в согласии со сдвиговым характером течения плазмы), а во-вторых — „вморожено“ в ее вещество (в силу идеальной проводимости последнего). Внутреннее и внешнее азимутальные магнитные поля связаны между собой через динамическое краевое условие (см. равенство, которое выписано первым на второй строке системы (3)). Внешнее азимутальное магнитное поле вследствие идеальной проводимости плазмы внутрь струи не проникает.

Поскольку цель дальнейшего рассмотрения состоит в исследовании проблемы МГД-устойчивости и токового разрушения жидких проводящих струй на примере математической модели (1)–(4), далее изучение сосредоточивается на крупномасштабных эволюционных осесимметричных струйных МГД-течениях.

Для этого в смешанной задаче (1)–(4) выполняются процедура обезразмеривания, переход к длинноволновому приближению, замена эйлеровых независимых переменных на эйлерово-лагранжевы и, наконец, исключение безразмерного модифицированного поля давления p_*. Так как данный порядок действия во всех подробностях описан в публикациях [14,16,23,24], то в настоящей статье можно привести лишь его итог — задачу Коши в форме

$$w_t+ww_z=\frac{\kappa^2R_{1z}}{2R_1^2}-\frac{(h_1^2R_1)_z}{2}+\frac{(h^2)_zR}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\nu}^{1}\big[R(h^2)_{\nu_1}\big]d\nu_1\right)_z,$$

$$R_{\nu t}+(wR_\nu)_z=0,\quad h_t+wh_z=0; \tag{5}$$

$$w(0,z,\nu)=w_0(z,\nu),\quad R(0,z,\nu)=R_0(z,\nu),$$

$$h(0,z,\nu)=h_0(z,\nu).$$

Здесь w — безразмерный осевой компонент поля скорости; t — безразмерное время; z — безразмерная осевая цилиндрическая координата; κ — безразмерная азимутальная составляющая магнитного поля вовне рассматриваемой струи; R — безразмерный квадрат радиальной цилиндрической координаты; R_1 — значение функции R на свободной поверхности проводящей струи; h — безразмерный азимутальный компонент магнитного поля в пределах исследуемой струи; h_1 — величина азимутальной составляющей h на свободной границе проводящей струи; $\nu\in[0,1]$ — лагранжева независимая переменная, нумерующая траектории движения жидких частиц в изучаемой струе; ν_1 — вспомогательное обозначение для переменной интегрирования. Здесь и далее индексы из смешанных эйлерово-лагранжевых независимых переменных t, z и ν отвечают соответствующим частным производным.

Ниже задача Коши (5) рассматривается в предположении, что h является заданной функцией независимой переменной ν: $h=h(\nu)$ [16,24]. Это допущение, конечно, несколько сужает класс исследуемых крупномасштабных нестационарных осесимметричных струйных МГД-течений. Тем не менее данное предположение:

а) согласуется со свойствами задачи Коши (5);

б) упрощает задачу Коши (5), делая ее более наглядной;

в) не мешает полному достижению всех запланированных выше результатов.

В итоге, задача Коши (5) может быть представлена в виде

$$w_t + ww_z = \left[\left(\frac{\kappa}{R_1}\right)^2 - h_1^2\right]\frac{R_{1z}}{2} + \int\limits_{\nu}^{1}\left[hR_z\,\frac{dh}{d\nu_1}\right]d\nu_1,$$

$$R_{\nu t} + (wR_\nu)_z = 0, \tag{6}$$

$$w(0,z,\nu) = w_0(z,\nu), \quad R(0,z,\nu) = R_0(z,\nu).$$

Установившиеся струйные МГД-течения и их устойчивость

Задача Коши (6) имеет точные стационарные решения в форме

$$w = w^0(\nu), \quad R = R^0(\nu), \quad R_1 = R_1^0 \equiv 1;$$

$$h = h(\nu): \qquad hR^0\,\frac{dh}{d\nu} = -w^0\,\frac{dw^0}{d\nu}, \tag{7}$$

где w^0 — произвольная, а R^0 — монотонно возрастающая функции лагранжевой независимой переменной ν; невозмущенный радиус проводящей струи взят равным ее характерному радиусу [16,24]. Нетрудно убедиться, что функции w^0, R^0 и R_1^0 (7) действительно обращают в тождества оба уравнения задачи Коши (6).

Последующее изучение нацелено на то, чтобы выяснить, будут ли точные стационарные решения (7) устойчивы относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$ и $R_1'(t,z)$.

По этой причине дальше осуществляется линеаризация задачи Коши (6) около ее точных стационарных решений (7), которая дает возможность прийти к задаче Коши вида

$$w_t' + w^0 w_z' = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2}\,R_{1z}' + \int\limits_{\nu}^{1}\left[hR_z'\,\frac{dh}{d\nu_1}\right]d\nu_1,$$

$$R_{\nu t}' + w^0 R_{\nu z}' + \frac{dR^0}{d\nu}\,w_z' = 0, \tag{8}$$

$$w'(0,z,\nu) = w_0'(z,\nu), \quad R'(0,z,\nu) = R_0'(z,\nu).$$

В свою очередь, на эволюционных решениях полученной задачи Коши сохраняется функционал — линейный аналог интеграла энергии:

$$E \equiv \frac{1}{2} \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{1}\left[\frac{dR^0}{d\nu}\,w'^2 + 2w^0w'R_\nu' + h^2R'R_\nu'\right]d\nu - \frac{\kappa^2}{2}\,R_1'^2\right)dz. \tag{9}$$

Точные стационарные решения (7) задачи Коши (6) будут устойчивы по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (8) тогда и только тогда, когда функционал E (9) знакоопределен. Однако, в силу критерия Сильвестра [26], оказывается, что интеграл E свойством знакоопределенности не обладает [16,24].

В результате достаточные условия и теоретической, и практической устойчивости точных стационарных решений (7) задачи Коши (6) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$ и $R_1'(t,z)$ (8) отсутствуют.

Априорная экспоненциальная оценка снизу роста малых возмущений

Далее прямым методом Ляпунова [19,20] будут установлены достаточные условия теоретической и практической неустойчивости точных стационарных решений (7) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (8). Кроме того, в случае, если установленные достаточные условия и теоретической, и практической неустойчивости истинны, будет построена априорная нижняя оценка, демонстрирующая, что рассматриваемые малые возмущения нарастают со временем не медленнее, чем экспоненциально.

Для того чтобы показать неустойчивость любого из точных стационарных решений (7) задачи Коши (6) относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений $w'(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$ и $R_1'(t,z)$ (8), нужно суметь выделить среди настоящих возмущений всего лишь одно, но зато растущее во времени, по меньшей мере, экспоненциально быстро.

С этой целью дальше исследуется подкласс осесимметричных струйных сдвиговых течений однородной по плотности невязкой идеально проводящей несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и „вмороженным“ азимутальным магнитным полем, который характеризуется тем свойством, что для него малые осесимметричные длинноволновые возмущения (8) служат отклонениями траекторий движения жидких частиц от соответствующих линий тока установившихся течений (7).

Данные возмущения довольно просто могут быть описаны посредством поля лагранжевых смещений $\xi = \xi(t,z,\nu)$ [27], определяемого соотношением

$$\xi_t = w' - w^0\xi_z. \tag{10}$$

При помощи уравнения (10) задачу Коши (8) можно переписать в форме

$$w_t' + w^0 w_z' = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2}\,R_{1z}' + \int\limits_{\nu}^{1}\left[hR_z'\,\frac{dh}{d\nu_1}\right]d\nu_1,$$

$$R_\nu' = -\frac{dR^0}{d\nu}\,\xi_z, \tag{11}$$

$$\xi(0,z,\nu) = \xi_0(z,\nu), \quad w'(0,z,\nu) = w_0'(z,\nu).$$

В интересах последующего изложения оправданно ввести в изучение добавочный функционал

$$M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{1} \frac{dR^0}{d\nu} \xi^2 d\nu dz. \tag{12}$$

Когда выполнены неравенства

$$h \frac{dh}{d\nu} > 0, \quad h_1^2 < \kappa^2, \tag{13}$$

из соотношений (10), (11) для этого функционала будет вытекать оригинальная дифференциальная оценка снизу [14,16,24]

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0 \tag{14}$$

(здесь λ — некая положительная постоянная).

Так как процедура интегрирования неравенства (14) детально охарактеризована в работах [14–17,24], далее сообщаются только ее итоги. Конкретно, если соотношение (14) дополнить счетным набором условий вида

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) > 0, \quad \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \geq 2\lambda M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right);$$

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0) \exp \frac{\pi n}{2}, \quad \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0) \exp \frac{\pi n}{2}, \tag{15}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, то из него, в свою очередь, с необходимостью будет следовать требуемая априорная экспоненциальная нижняя оценка

$$M(t) \geq C \exp \lambda t \tag{16}$$

(здесь C — известная положительная постоянная величина).

Прежде чем продолжить рассказ о полученных результатах, уместно осветить связь между рассматриваемой линеаризованной задачей Коши (10), (11) и добавленным к дифференциальному неравенству (14) счетным набором соотношений (15).

Именно, поскольку задача Коши (10), (11) линейна, то она разрешима по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям в форме нормальных мод [28]. Так как функционал E (9) не обладает свойством знакоопределенности, линеаризованная задача Коши (10), (11) разрешима и относительно нарастающих со временем малых осесимметричных длинноволновых возмущений в виде нормальных мод. Более того, если у задачи Коши (10), (11) имеется хотя бы одно растущее во времени решение, отвечающее малому осесимметричному длинноволновому возмущению в форме нормальной моды, то оно, благодаря произвольности положительной постоянной λ, будет удовлетворять неравенству (14), счетному набору условий (15) и оценке (16) тождественно и автоматически.

Таким образом, счетный набор соотношений (15) не препятствует тому, чтобы среди решений линеаризованной задачи Коши (10), (11) с дополнительными условиями

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0) \tag{17}$$

на начальные данные $\xi_0(z, \nu)$ и $w_0'(z, \nu)$ существовали нарастающие со временем решения, которые соответствуют малым осесимметричным длинноволновым возмущениям в виде нормальных мод.

Значит, класс решений задачи Коши (10), (11), (17), растущих во времени согласно априорной экспоненциальной оценке снизу (16), не пуст. Этот вывод далее будет подкреплен аналитическим примером.

Итак, продемонстрировано, что неравенства (13) являются желаемыми достаточными условиями линейной теоретической неустойчивости, а первая пара соотношений системы связей (15) — искомыми достаточными условиями линейной практической неустойчивости стационарных течений (7) по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (8), (10), (11), (17). Кроме того, показано, что относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (8), (10), (11), (17) в форме нормальных мод неравенства из системы соотношений (15) представляют собой и достаточные, и необходимые условия линейной практической неустойчивости установившихся течений (7).

Важно, что, в согласии с более ранними публикациями иных авторов [21,22], если существует теоретическая неустойчивость, то практическая неустойчивость в то же самое время может быть, а может и не быть. Тем не менее, как выяснилось, достаточные условия (см. неравенства системы соотношений (15)) линейной практической неустойчивости можно получить лишь тогда, когда отсутствуют достаточные условия линейной теоретической устойчивости. Любопытно также и то, что обнаруженные в данной статье достаточные условия линейной теоретической и практической неустойчивости носят конструктивный характер, поскольку их справедливость может быть протестирована как в физических экспериментах, так и в численных расчетах.

Что касается физического смысла установленных достаточных условий (13) линейной теоретической неустойчивости, то он заключается в том, что и внутреннее, и наружное азимутальные магнитные поля стремятся содействовать зарождению и развитию нарастающих малых возмущений (10), (11), (17) „перетяжечного“ типа [3,4,6,8,10,16]. Конкретно, если внутреннее азимутальное магнитное поле h строго возрастает по направлению от оси струи к ее свободной границе (см. первое из неравенств (13)), а наружное азимутальное магнитное поле κ превалирует над внутренним азимутальным магнитным полем h_1 на свободной поверхности струи (см. второе из неравенств (13)), то теоретически стационарные течения (7) будут подвержены разрушительному влиянию „перетяжечных“ растущих малых осесимметричных длинноволновых возмущений (10), (11), (17).

Физический смысл полученных достаточных условий (см. первую пару соотношений системы связей (15)) линейной практической неустойчивости состоит в том, что, произведя, скажем, высокоскоростную рентгеновскую киносъемку плазменной струи и осуществив затем обработку установленных посредством этого экспериментальных данных об изменении ее поперечных размеров с течением времени, при помощи настоящих условий практической неустойчивости можно ответить на вопрос, обладают ли малые возмущения (10), (11), (17) „перетяжечного“ типа тенденцией к неограниченному экспоненциальному возрастанию во времени, а следовательно — и к разрушительному воздействию на стационарные течения (7).

В завершение, разумно отметить то обстоятельство, что интеграл M (12) как раз и служит тут тем желаемым функционалом Ляпунова, который нарастает со временем в силу уравнений задачи Коши (10), (11), (17). Отличительной чертой этого роста является большой произвол, оставшийся за положительной постоянной величиной λ в показателе экспоненты из правой части неравенства (16). Он, например, позволяет интерпретировать всякое решение задачи Коши (10), (11), (17), которое нарастает во времени согласно найденной априорной экспоненциальной нижней оценке (16), в качестве аналога примера некорректности по Адамару [29].

Дальше представлен иллюстративный аналитический пример точных стационарных решений (7) задачи Коши (6) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (10), (11), (17), растущих со временем при выполнении установленных в данной работе достаточных условий линейной и теоретической, и практической неустойчивости в согласии со сконструированной априорной экспоненциальной оценкой снизу (16).

Пример

Исследуются стационарные осесимметричные струйные сдвиговые МГД-течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью и свободной границей в виде

$$w^0(\nu) = a - \nu^2, \quad R^0(\nu) = \nu, \quad R_1^0 = 1, \tag{18}$$

где $a > 1$ — некая постоянная. Несложно проверить, что эти течения — типичные представители установившихся течений (7) подкласса (13).

Учитывая соотношения (7), (10) и (18), второму уравнению из линеаризованной задачи Коши (10), (11) нетрудно придать форму

$$\xi_{tt} + 2(a-\nu^2)\xi_{tz} + (a-\nu^2)^2\xi_{zz} = \frac{\kappa^2 - h_1^2}{2} R'_{1z} + 2\int\limits_{\nu}^{1} (a-\nu_1^2) R'_z \, d\nu_1. \tag{19}$$

Далее ищутся эволюционные решения соотношения (19) в виде

$$\xi(t,z,\nu) = u(\nu)\exp(\alpha t + i\beta z),$$
$$R'(t,z,\nu) = v(\nu)\exp(\alpha t + i\beta z), \tag{20}$$

при этом, в силу третьего уравнения линеаризованной задачи Коши (10), (11), функции $u(\nu)$ и $v(\nu)$ обязаны удовлетворять соотношению

$$\frac{dv}{d\nu} = -i\beta u. \tag{21}$$

Здесь $\alpha \equiv \alpha_1 + i\alpha_2$ — произвольная комплексная, а β, α_1 и α_2 — некие вещественные постоянные величины.

Подстановка выражений (20) в уравнение (19) с использованием связи (21) и дифференцирование последнего по независимой переменной ν приводит, после некоторых алгебраических преобразований, к промежуточному соотношению в форме

$$\frac{d^2v}{d\nu^2} - \frac{4i\beta\nu}{\alpha + i\beta(a-\nu^2)}\frac{dv}{d\nu} + \frac{2\beta^2(a-\nu^2)}{[\alpha + i\beta(a-\nu^2)]^2} v = 0.$$

В свою очередь, в данном соотношении сначала производится замена искомой функции [30]

$$s(\nu) = v(\nu)\left[\alpha + i\beta(a-\nu^2)\right], \tag{22}$$

а потом — одновременная замена независимой переменной и искомой функции [31]

$$x = \int \frac{d\nu}{i\beta(\nu^2 - a) - \alpha}, \quad y(x) = \frac{s(\nu)}{\sqrt{i\beta(\nu^2 - a) - \alpha}}. \tag{23}$$

В итоге оно предстанет в виде уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + i\beta(\alpha - i\beta a)y = 0,$$

чьим общим решением служит выражение

$$y(x) = C_1\exp\left[x\sqrt{-i\beta(\alpha - i\beta a)}\right] + C_2\exp\left[-x\sqrt{-i\beta(\alpha - i\beta a)}\right], \tag{24}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Осуществив теперь в соотношении (24) обратные замены (22) и (23), вычислив функции $\xi(t,z,\nu)$, $R'(t,z,\nu)$ (20), (21) и подставив их в уравнение (19), можно определить значения постоянных C_1 и C_2, для которых соотношение (19) будет превращаться в тождество при любых постоянных α и β. Отсюда вытекает, что среди решений (20)–(24) задачи Коши (7), (10), (11), (13), (17), (18) есть целое семейство решений, нарастающих во времени экспоненциально ($\alpha_1 > 0$). Естественно, для этих растущих решений выполняются как неравенства (14), (16), так и счетный набор условий (15).

Следовательно, построение иллюстративного аналитического примера точных стационарных решений (7) задачи Коши (6) и наложенных на них малых осесимметричных длинноволновых возмущений (10), (11), (17), которые нарастают со временем при наличии обнаруженных в данной статье достаточных условий линейной теоретической (13) и практической (см. первые два соотношения из системы связей (15)) неустойчивости согласно сконструированной априорной экспоненциальной нижней оценке (16), окончено.

Заключение

Завершая изложение, стоит отдельно остановиться на том, как именно достаточные условия линейной практической неустойчивости (см. неравенства системы соотношений (15)) могут способствовать созданию эффективной методики управления струйными МГД-течениями в режиме реального времени.

Пусть, например, требуется разработать некий технологический процесс, базирующийся на применении устновившихся течений (7), (13).

Для того чтобы этот процесс был надежен в эксплуатации, надо обеспечить его практическую устойчивость по отношению ко всем допустимым возмущениям. В частности, данный технологический процесс должен быть устойчив в практическом смысле относительно малых осесимметричных длинноволновых возмущений (10), (11), (17).

Этой цели можно добиться путем построения численной и физической моделей, которые соответствовали бы линеаризованной задаче Коши (10), (11), с контролем в реперных временных точках $t_n \equiv \pi n/2\lambda$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ истинности неравенств из системы соотношений (15). В ходе конструирования данных моделей основные усилия нужно сконцентрировать на том, чтобы неравенства системы соотношений (15) не были справедливы за счет тех или других известных внешних воздействий на нестационарные течения (10), (11) (к примеру, за счет нарушения начальных условий (17)).

В результате будет гарантирована практическая устойчивость разрабатываемого технологического процесса, по крайней мере, по отношению к малым осесимметричным длинноволновым возмущениям (10), (11), (17) в виде нормальных мод, а значит — будет создана и эффективная методика управления установившимися струйными МГД-течениями (7), (13) в режиме реального времени.

И последнее, поскольку в дифференциальном неравенстве (14) не содержится какой-либо информации о точных стационарных решениях (7), (13) задачи Коши (6), логично ожидать, что это неравенство в том либо ином виде будет возникать и при изучении других математических моделей механики жидкости, газа и плазмы.

Опираясь на перечисленные выше факты, несложно прийти к выводу, что продемонстрированный в данной статье алгоритм построения функционалов Ляпунова, характеризующихся свойством расти во времени в силу рассматриваемых линеаризованных уравнений движения, будет, бесспорно, хорошим подспорьем в ходе исследования широкого круга задач и теоретической, и практической линейной гидродинамической устойчивости.

Автор выражает искреннюю признательность и сердечную благодарность А.М. Блохину за плодотворные обсуждения итогов настоящей работы и полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00585а) и Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 2.1.1/4591).

Список литературы

[1] *Biskamp D., Schwarz E., Zeiler A.* // Phys. Plasma. 1998. Vol. 5. N 7. P. 2485–2488.
[2] *Keppens R., Toth G.* // Phys. Plasma. 1999. Vol. 6. N 5. Pt. 1. P. 1461–1469.
[3] *Гельфгат Ю.М., Ольшанский С.В., Явнайст Г.А.* // Магнитная гидродинамика. 1973. № 2. С. 49–54.
[4] *Абрамова К.Б., Златин Н.А., Перегуд Б.П.* // ЖЭТФ. 1975. Т. 69. Вып. 6 (12). С. 2007–2022.
[5] *Moffatt H.K., Toomre J.* // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. P. 65–82.
[6] *Шейхалиев Ш.М., Попель С.И.* // Порошковая металлургия. 1982. № 3. С. 82–92.
[7] *Chhabra R.K., Trehan S.K.* // Astrophys. Space Sci. 1991. Vol. 183. N 1. P. 37–50.
[8] *Павловский А.И., Пляшкевич Л.Н., Шувалов А.М., Бродский А.Я.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 2. С. 76–82.
[9] *Littlefield D.L.* // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. N 8. P. 2722–2729.
[10] *Матросов А.Д., Швецов Г.А.* // ПМТФ. 1996. № 4. С. 9–14.
[11] *Koldoba A.V., Ustyugova G.V., Romanova M.M., Chechetkin V.M., Lovelace R.V.E.* // Astrophys. Space Sci. 1995. Vol. 232. N 2. P. 241–261.
[12] *Einaudi G.* // Plasma Physics and Controlled Fusion. 1999. Vol. 41. N 3A. P. A293–A305.
[13] *Casse F., Ferreira J.* // Astrophys. Space Sci. 2001. Vol. 276. Suppl. P. 263–266.
[14] *Губарев Ю.Г.* // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 2. С. 111–123.
[15] *Gubarev Yu.G.* // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2007. Vol. 1. N 1. P. 103–118.
[16] *Gubarev Yu.G.* // Progress in nonlinear analysis research / Ed. E.T. Hoffmann. NY: Nova Science Publishers, Inc., 2009. P. 137–181.
[17] *Губарев Ю.Г.* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII. № 2. С. 38–53.
[18] *Губарев Ю.Г.* // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т. 16. № 3. С. 429–441.
[19] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., ГИТТЛ, 1950. 471 с.
[20] *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

[21] *Карачаров К.А., Пилютик А.Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1962. 244 с.
[22] *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964. 168 с. (*La Salle J., Lefschetz S.* Stability by Liapunov's direct method with applications. NY; London: Academic Press, 1961. 134 p.)
[23] *Губарев Ю.Г., Никулин В.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 64–75.
[24] *Губарев Ю.Г.* // Тр. Междунар. сем. „Гидродинамика высоких плотностей энергии“. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2004. С. 94–103.
[25] *Половин Р.В., Демуцкий В.П.* Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 206 с.
[26] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
[27] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с. (*Chandrasekhar S.* Ellipsoidal figures of equilibrium. New Haven; London: Univ. Press, 1969. 252 p.)
[28] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
[29] *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
[30] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 468 с.
[31] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.