

01;03

Влияние феномена релаксации заряда на капиллярный распад заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости в коллинеарном электростатическом поле

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2010 г.)

В линейном по безразмерной амплитуде волны аналитическом расчете выведено дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности заряженной струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в коллинеарном оси струи электростатическом поле. Для осесимметричных волн, неустойчивость которых приводит к распаду струи на капли, эффект конечности скорости выравнивая электрического потенциала заметно сказывается лишь для струй слабо проводящих жидкостей. Влияние эффекта релаксации заряда проявляется в том, что появляются „чисто релаксационные“ течения жидкости, как периодические, так и аperiodические. Уменьшение проводимости жидкости увеличивает инкременты неустойчивых волн и расширяет их спектр в область коротких длин. Наличие на струе поверхностного заряда повышает нестабильность поверхности струи. Увеличение коэффициента поверхностной диффузии зарядов по-разному влияет на капиллярные и релаксационные ветви решения: увеличивает декременты затухания первых и уменьшает декременты вторых. При больших значениях коэффициента диффузии релаксационные течения могут стать неустойчивыми.

Введение

Феномен капиллярного распада струй жидкости на отдельные капли и, в частности, при наличии электрического заряда на струе ее электродиспергирования хорошо изучен экспериментально и теоретически и широко используется в технике и технологии (см., например, [1–3] и приведенную там литературу). Тем не менее некоторые вопросы, связанные с этими процессами, исследованы не полностью и нуждаются в дополнительном изучении. В частности, сказанное относится к теоретическому анализу особенностей распада заряженных струй с конечной проводимостью или, иначе говоря, при учете эффекта релаксации электрического заряда, хотя и эта проблема не была обойдена вниманием (см., например, [4–12]). Однако в работах [4–10] при записи уравнения баланса заряда на поверхности струи опущено слагаемое, пропорциональное средней кривизне струи, а потому результаты теоретических анализов [4–11] не вполне корректны. Обсуждаемая ошибка довольно распространена, а причина этого в том, что уравнение баланса заряда, выписанное для плоской поверхности и не содержащее слагаемого, пропорционально средней кривизне невозмущенной поверхности жидкости, механически переносится на криволинейную поверхность. На это было указано в работе [13], где уравнение баланса строго выведено для произвольной криволинейной поверхности.

В работах [4,5,7–11] рассматривалась устойчивость струй жидкостей с конечной проводимостью при наличии продольного электростатического поля. Такая задача актуальна, поскольку в реальных установках

для электродиспергирования жидкости используется система электродов типа „игла–плоскость“ [2,3,14] или „плоскость–игла–плоскость“ [2,3,15], при этом напряженность электростатического поля имеет сравнимые по величине нормальную и касательную к поверхности струи компоненты. Это замечание относится и к струйке жидкости, выбрасываемой неустойчивой по отношению к поверхностному заряду каплей [2,16]. В связи со сказанным исследование влияния феномена релаксации заряда на капиллярный распад заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости в коллинеарном электростатическом поле является весьма актуальным.

1. Постановка задачи и ее математическая формулировка

Рассмотрим цилиндрическую струю несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и удельной проводимостью σ , помещенную во внешнюю не проводящую среду, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} и пренебрежимо малой плотностью. В окружающем струю пространстве создается электростатическое поле напряженности E_0 , коллинеарное оси струи, а на ее поверхности равномерно распределен заряд с равновесной поверхностной плотностью χ_0 . Причиной возникновения поверхностного заряда может быть создание в окружающем струю пространстве радиального электростатического поля, при этом предполагается, что проводимость жидкости достаточна, чтобы обеспечить отсутствие заряда в объеме струи.

Для решения задачи введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , движущуюся с постоянной скоростью, равной несущей скорости струи, ось Oz которой совпадает с осью струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых радиус струи R , плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения γ примем в качестве основных масштабов обезразмеривания ($R = \rho = \gamma = 1$).

Уравнение свободной поверхности струи, подверженной произвольным осцилляциям малой амплитуды, может быть записано в виде:

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t),$$

где функция $\xi(\varphi, z, t)$ описывает отклонение формы поверхности от цилиндрической, а ее амплитуда является малым параметром задачи ($|\xi(\varphi, z, t)| \ll 1$).

Будем исследовать устойчивость осциллирующей свободной поверхности струи в описанной системе. Математическая формулировка соответствующей задачи имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P_{\text{in}} + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad \nabla P_{\text{ex}} = 0;$$

$$\mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j; \quad \Delta \Phi_j = 0; \quad j = \{\text{in}; \text{ex}\};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u} \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi_{\text{in}} \rightarrow -E_{\text{in}}^{(0)} \mathbf{e}_z;$$

$$t \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_{\text{ex}} \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z;$$

$$r = 1 + \xi(\varphi, z, t): \quad \Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}};$$

$$\varepsilon_{\text{in}} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{ex}} = 4\pi \chi;$$

$$\partial_t H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla H(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$H(\mathbf{r}, t) \equiv r - [1 + \xi(\varphi, z, t)];$$

$$\nu (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Pi_\varphi = 0;$$

$$\nu (\boldsymbol{\tau}_z \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Pi_z + T = 0;$$

$$-P_{\text{in}} + P_{\text{ex}} + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} - P_E + P_\gamma = 0.$$

Здесь использованы следующие обозначения: P_{in} — гидродинамическое давление внутри струи; P_{ex} — давление во внешней среде; $\Phi_{\text{in}}, \Phi_{\text{ex}}, \mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{E}_{\text{ex}}$ — потенциалы и напряженность электрического поля внутри (in) и вне (ex) струи; $E_{\text{in}}^{(0)}$ — напряженность электрического поля на оси струи в равновесном состоянии; $\boldsymbol{\tau}_\varphi, \boldsymbol{\tau}_z$ и \mathbf{n} — касательные орты и орт нормали к возмущенной поверхности струи; Π_φ и Π_z — касательные компоненты электрической силы, действующей на единицу поверхности струи, а P_E, P_γ — давления на свободную поверхность электрического поля и капиллярных сил соответственно:

$$\Pi_i = \frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon_{\text{in}} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla \Phi_{\text{in}}) (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{in}}) - \varepsilon_{\text{ex}} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla \Phi_{\text{ex}}) (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{ex}}) \right] \quad (i = \varphi, z);$$

$$P_E = \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_{\text{in}} ((\nabla \Phi_{\text{in}})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{in}})^2) - \varepsilon_{\text{ex}} ((\nabla \Phi_{\text{ex}})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{\text{ex}})^2) \right];$$

$$P_\gamma = \text{divn}.$$

Необходимо отметить, что в динамическом граничном условии для касательного направления $\boldsymbol{\tau}_z$ в невозмущенном состоянии системы вследствие движения поверхностного заряда в продольном электрическом поле электрическое касательное напряжение отлично от нуля. Для того чтобы его скомпенсировать, в уравнение формальным образом введено постоянное внешнее напряжение T , причиной возникновения которого может быть, например, сопротивление среды движению струи.

Сформулированную задачу дополним уравнением, описывающим динамику изменения поверхностной плотности электрического заряда:

$$\partial_t \chi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\sigma + \chi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{n} + \nabla_\Sigma \cdot (\chi (\mathbf{U}_\tau + b \mathbf{E}_\tau)) + \nabla_\Sigma \cdot (D \nabla_\Sigma \chi) = 0,$$

где

$$\mathbf{u}_\tau = (\mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})); \quad \mathbf{E}_\tau = (\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})); \quad \mathbf{j}_\sigma = -\sigma \mathbf{E}_{\text{in}};$$

$\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{A}$ и $\nabla_\Sigma \chi$ — поверхностная дивергенция и поверхностный градиент, вычисляемые по формулам (символом Σ обозначена поверхность струи):

$$\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{A} = \left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) \Big|_\Sigma;$$

$$\nabla_\Sigma \chi = \left(\nabla \chi - \mathbf{n} \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) \Big|_\Sigma.$$

В уравнении баланса заряда учтены следующие физические факторы: проводимость жидкости, изменение площади свободной поверхности в результате ее деформации, перемещение зарядов вдоль поверхности током жидкости, под действием тангенциальной компоненты электрического поля и за счет диффузии. Последние два из перечисленных процесса характеризуются подвижностью носителей заряда b и коэффициентом диффузии D .

Сформулированную задачу рассмотрим в линейном приближении по малой амплитуде отклонения формы осциллирующей струи от цилиндрической. Во введенной системе координат движение жидкости вызвано колебаниями поверхности струи, вследствие чего поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ будем полагать имеющим тот же порядок малости, что и возмущение ξ : $|\mathbf{u}| \approx |\xi|$. Представим все искомые величины в виде разложений по порядкам малости:

$$\Phi_j(\mathbf{r}, t) = \Phi_j^{(0)}(r, z) + \phi_j(\mathbf{r}, t), \quad j = \{\text{in}; \text{ex}\};$$

$$P_{\text{in}} = P_{\text{in}}^{(0)} + p_{\text{in}}; \quad P_E = P_E^{(0)} + p_E; \quad P_\gamma = P_\gamma^{(0)} + p_\gamma;$$

$$\Pi_i = \Pi_i^{(0)} + \Pi_i^{(1)}, \quad \{i = \varphi, z\}; \quad \chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)},$$

где верхним индексом „нуль“ обозначены величины, характеризующие невозмущенное состояние системы, а функции $\phi_j(\mathbf{r}, t)$, p_{in} , p_E , p_γ , $\Pi_i^{(1)}$ и $\chi^{(1)}$ имеют первый порядок малости по возмущению поверхности струи ξ .

2. Равновесное состояние

Задача нулевого порядка описывает равновесное, невозмущенное состояние системы

$$\nabla P_{\text{in}}^{(0)} = 0; \quad \nabla P_{\text{ex}} = 0; \quad \Delta \Phi_j^{(0)} = 0; \quad j = \{\text{in}; \text{ex}\};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \Phi_{\text{in}}^{(0)} \rightarrow -E_{\text{in}}^{(0)} \mathbf{e}_z;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_{\text{ex}}^{(0)} \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z;$$

$$r = 1: \quad \Pi_\varphi^{(0)} = 0; \quad \Pi_z^{(0)} + T = 0;$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(0)} = \Phi_{\text{ex}}^{(0)}; \quad \varepsilon_{\text{in}} \partial_r \Phi_{\text{in}}^{(0)} - \varepsilon_{\text{ex}} \partial_r \Phi_{\text{ex}}^{(0)} = 4\pi \chi^{(0)};$$

$$P_{\text{in}}^{(0)} - P_{\text{ex}} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)}; \quad \partial_r \Phi_{\text{in}}^{(0)} = 0; \quad P_\sigma^{(0)} = 1;$$

$$\Pi_i^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon_{\text{in}} (\partial_i \Phi_{\text{in}}^{(0)}) (\partial_r \Phi_{\text{in}}^{(0)}) - \varepsilon_{\text{ex}} (\partial_i \Phi_{\text{ex}}^{(0)}) (\partial_r \Phi_{\text{ex}}^{(0)}) \right] \quad \{i = \varphi, z\};$$

$$\Pi_E^{(0)} = \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_{\text{in}} \left((\nabla \Phi_{\text{in}}^{(0)})^2 - 2(\partial_r \Phi_{\text{in}}^{(0)})^2 \right) - \varepsilon_{\text{ex}} \left((\nabla \Phi_{\text{ex}}^{(0)})^2 - 2(\partial_r \Phi_{\text{ex}}^{(0)})^2 \right) \right]$$

и позволяет определить электростатические потенциалы, давление жидкости в струе, а также величину необходимого компенсационного касательного напряжения T , связанного с сопротивлением среды:

$$\Phi_{\text{ex}}^{(0)} = -E_0 z - \frac{4\pi \chi_0}{\varepsilon_{\text{ex}}} \ln r; \quad \Phi_{\text{in}}^{(0)} = -E_0 z;$$

$$P_{\text{in}}^{(0)} = P_{\text{ex}} + 1 - \frac{1}{8\pi} \left[(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}}) E_0^2 + \varepsilon_{\text{ex}} \left(\frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \right)^2 \right];$$

$$\chi^{(0)} = \text{chi}_0; \quad T = E_0 \chi_0.$$

3. Задача первого порядка малости

В линейном по малой безразмерной амплитуде приближении с учетом решений нулевого порядка задача выписывается в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad \partial_t \mathbf{u} = -\nabla p_{\text{in}} + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad (1)$$

$$\Delta \phi_j = 0; \quad j = \{\text{in}; \text{ex}\}; \quad (2)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u} \rightarrow 0; \quad |\nabla \phi_{\text{in}}| \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \phi_{\text{ex}}| \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$r = 1: \quad -\partial_t \xi + u_r = 0; \quad (4)$$

$$\nu (\partial_r u_\varphi + \partial_\varphi u_r - u_\varphi) + \Pi_\varphi^{(1)} = 0; \quad (5)$$

$$\nu (\partial_r u_z + \partial_z u_r) + \Pi_z^{(1)} = 0; \quad (6)$$

$$-p_{\text{in}} + 2\nu \partial_r u_r - p_E + p_\gamma = 0; \quad (7)$$

$$\phi_{\text{in}} = \phi_{\text{ex}} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \xi; \quad (8)$$

$$4\pi \chi^{(1)} = \varepsilon_{\text{in}} (\partial_r \phi_{\text{in}} + E_0 \partial_z \xi) - \varepsilon_{\text{ex}} \left(\partial_r \phi_{\text{ex}} + \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \xi + E_0 \partial_z \xi \right); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \chi^{(1)} + \sigma (\partial_r \phi_{\text{in}} + E_0 \partial_z \xi) + \chi_0 (u_r + \partial_\varphi u_\varphi + \partial_z u_z) \\ + b \left[E_0 (\partial_z \chi^{(1)} + \chi_0 \partial_z \xi) - \chi_0 (\partial_{z,z} \phi_{\text{in}} + \partial_{\varphi,\varphi} \phi_{\text{in}}) \right] \\ + D (\partial_{z,z} \chi^{(1)} + \partial_{\varphi,\varphi} \chi^{(1)}) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Pi_\varphi^{(1)} = \chi_0 \left(\partial_\varphi \phi_{\text{ex}} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \partial_\varphi \xi \right); \quad (11)$$

$$\Pi_z^{(1)} = -E_0 \chi^{(1)} + \chi_0 \left(\partial_z \phi_{\text{ex}} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \partial_z \xi \right); \quad (12)$$

$$p_\gamma = -\xi - \partial_{\varphi,\varphi} \xi - \partial_{z,z} \xi; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} p_E = -\frac{1}{4\pi} \left\{ E_0 \left[(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}}) \partial_z \phi_{\text{ex}} - (\varepsilon_{\text{in}} - 2\varepsilon_{\text{ex}}) \frac{4\pi}{\varepsilon_{\text{ex}}} \chi_0 \partial_z \xi \right] \right. \\ \left. + 4\pi \chi_0 \left(\partial_z \phi_{\text{ex}} + \frac{4\pi \chi_0}{\varepsilon_{\text{ex}}} \xi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для решения системы уравнений (1) в рамках метода операторной скаляризации (см. [17]) представим исконое поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ в виде разложения на три ортогональных векторов поля:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (15)$$

где дифференциальные векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) определяются соотношениями

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{e}_z; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z)$$

и удовлетворяют условиям ортогональности и коммутативности с оператором Лапласа:

$$\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_i = 0 \quad (j \neq i); \quad \Delta \hat{\mathbf{N}}_i = \hat{\mathbf{N}}_i \Delta.$$

Здесь $\hat{\mathbf{N}}_j^+$ — оператор, эрмитово сопряженный к $\hat{\mathbf{N}}_j$. Подстановка разложения (15) в уравнения (1) позволяет преобразовать их в систему уравнений для скалярных функций $\psi_i(\mathbf{r}, t)$:

$$\Delta \psi_1(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \partial_t \psi_i(\mathbf{r}, t) - \nu \Delta \psi_i(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (i = 2, 3), \quad (16)$$

$$p_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \psi_1(\mathbf{r}, t),$$

при этом выражения для проекций вектора скорости на орты сферической системы координат, входящие в граничные условия (3)–(7), (10), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \partial_r \psi_1 + \frac{1}{r} \partial_\varphi \psi_2 + \partial_{z,r} \psi_3; \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \partial_\varphi \psi_1 - \partial_r \psi_2 + \frac{1}{r} \partial_{z,\varphi} \psi_3; \\ u_z &= \partial_r \psi_1 - \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \psi_3) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi,\varphi} \psi_3 \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку целью данного исследования является анализ устойчивости поверхности струи, для которого достаточно вывести дисперсионное уравнение задачи, будем искать решение в виде одиночной волны, т.е. примем, что искажение равновесной цилиндрической поверхности струи определяется функцией вида:

$$\xi(\varphi, z, t) = A \exp[st + i(kz + m\varphi)], \quad (18)$$

где k — волновое число, определяющее длину волны ($\lambda = 2\pi/k$); m — целое число (азимутальное число), характеризующее ее осевую симметрию; A — амплитуда волны, s — частота (в общем случае комплексная); i — мнимая единица.

Решения уравнений (16) для склярных функций ψ_j ($j = \{1, 2, 3\}$) и уравнений (2) для потенциалов ϕ_f (здесь $f = \{\text{in}; \text{ex}\}$) будем искать в виде, аналогичном (18):

$$\sim \exp[st + i(kz + m\varphi)].$$

Определяя из уравнений их зависимость от радиальной координаты r , с учетом условий ограниченности (3) запишем решения в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1(\mathbf{r}, t) &= B_1 \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \exp[st + i(kz + m\varphi)]; \\ \psi_j(\mathbf{r}, t) &= B_j \frac{I_m(lr)}{I_m(l)} \exp[st + i(kz + m\varphi)]; \\ j &= \{2, 3\}; \quad l \equiv \sqrt{\frac{s}{v} + k^2}; \\ \phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= F_{\text{in}} \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \exp[st + i(kz + m\varphi)]; \\ \phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &= F_{\text{ex}} \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} \exp[st + i(kz + m\varphi)], \end{aligned} \quad (19)$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [18], а B_j ($j = \{1, 2, 3\}$) и F_f ($f = \{\text{in}; \text{ex}\}$) — константы, определяемые из системы граничных условий.

Рассмотрим граничные условия (8)–(10). Подставив в них решения для электростатических потенциалов $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, получим из уравнения (9) выражение

для поправки первого порядка малости к поверхностной плотности заряда:

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= \left\{ A \left[\alpha_1 \alpha_4 - \chi_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{ex}}} g_m(k) \right) + ik \frac{E_0}{4\pi} (\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}}) \right] \right. \\ &\quad \left. - \chi_0 \alpha_1 (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3) \right\} \exp[st + i(kz + m\varphi)], \end{aligned}$$

учитывая которое, из (8), (10) выразим коэффициенты F_{in} и F_{ex} через B_j и амплитуду волны A :

$$\begin{aligned} F_{\text{ex}} &= 4\pi [\alpha_4 A - \chi_0 (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3)]; \\ F_{\text{in}} &= 4\pi \left[\left(\alpha_4 - \frac{\chi_0}{\varepsilon_{\text{ex}}} \right) A - \chi_0 (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив решения (18)–(20) в (11), (12), (14), получим соответствующие выражения для электрических компонент касательных напряжений и давления электрического поля:

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi^{(1)} &= 4\pi i \chi_0 m \left[\left(\alpha_4 - \frac{\chi_0}{\varepsilon_{\text{ex}}} \right) A - \chi_0 (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3) \right] \\ &\quad \times \exp[st + i(kz + m\varphi)]; \\ \Pi_z^{(1)} &= \{ A (\alpha_8 \alpha_4 + \alpha_9) - \chi_0 \alpha_8 (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3) \} \\ &\quad \times \exp[st + i(kz + m\varphi)]; \\ p_E &= - \{ (\alpha_{10} \alpha_4 + \alpha_{11}) A - \chi_0 \alpha_{10} (\alpha_5 B_1 - \alpha_6 B_2 - \alpha_7 B_3) \} \\ &\quad \times \exp[st + i(kz + m\varphi)]. \end{aligned}$$

Использованные выше для сокращения записи коэффициенты α_n ввиду их громозкости приведены в Приложении.

Система гидродинамических граничных условий (4)–(7) с учетом соотношений (17), (13) после подстановки в нее решений (18), (19) и выражений для $\Pi_f^{(1)}$ ($f = \{\varphi, z\}$), p_E преобразуется в систему из четырех линейных алгебраических однородных уравнений относительно неизвестных A и B_j , где $j = \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Условие разрешимости этой системы (обращение детерминанта матрицы коэффициентов в нуль) определяет дисперсионное уравнение задачи, связывающее комплексную частоту s с волновым числом k и всеми остальными параметрами задачи:

$$\det[a_{ij}] = 0; \quad (21)$$

$$a_{11} = s; \quad a_{12} = -g_m(k); \quad a_{13} = -im; \quad a_{14} = -ikg_m(l);$$

$$a_{21} = im4\pi\chi_0 \left(a_4 - \frac{\chi_0}{\varepsilon_{\text{ex}}} \right);$$

$$\begin{aligned}
a_{22} &= -im[2v(1 - g_m(k)) + 4\pi\chi_0^2\alpha_5]; \\
a_{23} &= -v(l^2 + 2m^2 - 2g_m(l)) + im4\pi\chi_0^2\alpha_6; \\
a_{24} &= 2vmk(1 - g_m(l)) + im4\pi\chi_0^2\alpha_7; \\
a_{31} &= \alpha_9 + \alpha_4\alpha_8; \quad a_{32} = 2vikg_m(k) - \chi_0\alpha_5\alpha_8; \\
a_{33} &= -vmk + \chi_0\alpha_6\alpha_8; \quad a_{34} = -v(l^2 + k^2)g_m(l) + \chi_0\alpha_7\alpha_8; \\
a_{41} &= 1 - k^2 - m^2 - (\alpha_{11} + \alpha_4\alpha_{10}); \\
a_{42} &= -s - 2v[k^2 + m^2 - g_m(k)] + \chi_0\alpha_5\alpha_{10}; \\
a_{43} &= i2vm[1 - g_m(l)] - \chi_0\alpha_6\alpha_{10}; \\
a_{44} &= -i2vk[l^2 + m^2 - g_m(l)] - \chi_0\alpha_7\alpha_{10}.
\end{aligned}$$

Получающееся из (21) в результате раскрытия определителя дисперсионное уравнение весьма громоздко и сложно даже для численного анализа, поэтому имеет смысл рассмотреть физически наиболее значимый предельный вид данного уравнения — предел малой вязкости.

4. Предел малой вязкости

Прежде всего, заметим, что в используемых в задаче безразмерных переменных характерным масштабом измерения безразмерной вязкости является величина: $\sqrt{R\gamma/\rho}$. При изменении радиуса струи в диапазоне $10^{-2} \leq R \leq 1$ см значения безразмерной вязкости для воды варьируются в пределах $11.7 \cdot 10^{-3} \geq \nu \geq 10^{-3}$, а для струи циклогексанола $1 \geq \nu \geq 0.13$. Из приведенных оценок видно, что асимптотика малой вязкости может быть использована для анализа устойчивости струй широкого диапазона радиусов весьма различных жидкостей.

Кроме того, отметим, что в рассматриваемой задаче в касательных динамических граничных условиях (5), (6) вязкие напряжения компенсируют напряжения электрической природы, и, следовательно, они должны иметь одинаковый порядок величины. Это дает возможность оценить соотношения между величинами напряженности продольного поля, поверхностного заряда и вязкости. Однако прежде, рассмотрев граничные условия (4)–(6) для случая $\chi_0 = 0$, $E_0 = 0$ или же используя известное решение задачи о капиллярных осцилляциях струи вязкой жидкости (см., например, [19]), несложно установить, что в приближении малой вязкости имеют место следующие соотношения между коэффициентами B_i ($i = \{1, 2, 3\}$) и A в решениях (18), (19):

$$B_1 \approx A; \quad B_2 \approx \nu A; \quad B_3 \approx \nu^{3/2} A. \quad (22)$$

При получении этих оценок учитывалось, что в разложении (15) первое слагаемое соответствует потенциальной компоненте поля скоростей, а второе и третье — вихревой. Поэтому в предельном переходе к идеальной жидкости ($\nu = 0$) функции $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_3(\mathbf{r}, t)$ должны исчезать, а $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ — переходить в решение для невязкой жидкости.

Воспользовавшись соотношениями (22) и проанализировав условия (5), (6) при $\chi_0 \neq 0$, $E_0 \neq 0$, в том же приближении малой вязкости можно получить:

$$\chi_0 \approx \sqrt{\nu}; \quad E_0 \approx \sqrt{\nu}. \quad (23)$$

Для перехода к пределу малой вязкости в дисперсионном уравнении (21) для входящих в решение модифицированных функций Бесселя первого рода $I_m(l)$ воспользуемся асимптотическим представлением при больших значениях аргумента ($l = \sqrt{s/\nu} + k^2 \approx \nu^{-1/2}$) ([17], стр. 199):

$$\begin{aligned}
I_m(l) &\approx \frac{\exp(l)}{\sqrt{2\pi l}} \left(1 - \frac{1}{8l}(4m^2 - 1) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2!(8l)^2}(4m^2 - 1)(4m^2 - 9) \\
&\quad \left. - \frac{1}{3!(8l)^3}(4m^2 - 1)(4m^2 - 9)(4m^2 - 25) + \dots \right).
\end{aligned}$$

Учитывая (23), разложим (21) в ряд по ν , сохраняя слагаемые порядка малости не выше первого. В результате дисперсионное уравнение приведем к относительно простому виду:

$$\begin{aligned}
s^2 - f_1 g_m(k) + 2\nu s \left(f_2 - \frac{m^2}{s^2} f_1 \right) + \frac{1}{2s(s\alpha_1 + 4\pi\sigma g_m(k))} \\
\times \left\{ w 2sk^2 [s f_3 + 4\pi\sigma\alpha_1 - D(k^2 + m^2) f_4] \right. \\
+ W [s^2 f_5 + 2s(4\pi\sigma f_6 - D(k^2 + m^2) f_7) + f_1 f_8] \\
- ik\sqrt{w}\sqrt{W} [s^2 f_9 \alpha_1 + 2s(4\pi\sigma f_{10} + D(k^2 + m^2) f_{11}) \\
\left. - f_1 f_2 \alpha_1] \right\} = 0;
\end{aligned}$$

$$w = \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad W = 4\pi\chi^2,$$

где параметры w и W характеризуют величину внешнего поля и поверхностного заряда соответственно. Коэффициенты f_j ($j = 1, 2, \dots, 11$) являются функциями волнового числа k , азимутального числа m и диэлектрических проницаемостей ϵ_{in} , ϵ_{ex} , а явные выражения для них приведены в Приложении.

Прежде всего, обратим внимание на тот факт, что в полученном уравнении из-за ограничения малыми степенями вязкости исчезли компоненты, связанные с подвижностью носителей заряда b , откуда следует, что влияние данного физического фактора на осцилляции поверхности струи значительно слабее остальных, учтенных в уравнении переноса заряда.

Отметим далее, что уравнение (24) представлено в виде, из которого легко получить предельные переходы к известным решениям [2] задач о поверхностных колебаниях незаряженной струи идеальной и вязкой жидкостей. Для приведения дисперсионного уравнения

к такому виду понадобилось исходное уравнение (21), разложенное в ряд по вязкости, разделить на выражение следующего вида:

$$1 + \frac{\sqrt{W}}{s^2 \sqrt{\nu} s \alpha_1} N \left[s + \frac{bD\sigma}{\sqrt{4\pi}} (k^2 + m^2) g_m(k) N \right];$$

$$N \equiv \sqrt{W} (k^2 + m^2) + ik \sqrt{w} \alpha_1.$$

Значения комплексной частоты s , обращающие это выражение в нуль, видимо, можно рассматривать как „потерянные“ корни. Если умножить это выражение на $s^{3/2}$ и, приравняв нулю, получить уравнение, то методом последовательных приближений несложно найти соответствующее решение:

$$s \approx -\frac{W^{1/3}}{\nu^{1/3}} N^{2/3} \frac{1}{2\alpha_1^{2/3}} (1 - i\sqrt{3}) \times \left[1 - \frac{\nu^{1/3}}{W^{1/3}} N^{1/3} \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{3}) \frac{\alpha_1^{2/3}}{\sqrt{4\pi}} bD\sigma (k^2 + m^2) g_m(k) \right].$$

Из приведенного выражения с учетом того, что, согласно оценкам (23), $W \approx \nu$, $w \approx \nu$ и, следовательно, $N \approx \sqrt{\nu}$, видно, что корень имеет величину $\sim \nu^{1/3}$.

Дисперсионное уравнение (24) является уравнением полиномиального вида и позволяет выполнить численный анализ влияния явления релаксации заряда на осцилляции поверхности струи с различной азимутальной симметрией.

Для обоснования выбора при расчетах значений входящих в задачу безразмерных параметров приведем следующие соображения. Учитывая сделанные выше оценки характерной величины безразмерной вязкости, примем $\nu \approx 10^{-2}$. В соответствии с соотношениями (23), в рамках которых получено уравнение (24), величины электрических параметров w и W должны быть ограничены сверху выбранным значением ν , поэтому получим, что $w_{\max} \approx 10^{-2}$, $W_{\max} \approx 0.3$. Величина безразмерной проводимости для струи воды с радиусом ~ 1 мм составляет $\sim 3.3 \cdot 10^3$, для такой же струи циклогексанола $\sim 2 \cdot 10^2$, а при радиусе ~ 0.1 мм уже ~ 10 .

5. Осесимметричные осцилляции ($m = 0$)

Волновые возмущения свободной поверхности струи с нулевым азимутальным числом соответствуют осесимметричным деформациям. В отсутствие внешнего электрического поля и поверхностного заряда такие возмущения с волновыми числами в диапазоне $k < 1$ неустойчивы (поверхностная энергия цилиндрического столба жидкости радиуса R меньше таковой для совокупности капель с радиусом $1.5R$, на которые такой столб распадется под действием капиллярных сил [1–3]). Их амплитуды экспоненциально нарастают во времени, приводя к развитию так называемой „перетяжечной“, или

„сосисочной“, неустойчивости. В выполненных ранее исследованиях без учета феномена релаксации заряда было показано, что наличие заряда на поверхности струи идеально проводящей жидкости (наличие радиального электрического поля) дестабилизирует ее [1–3,20], а электрическое поле, коллинеарное оси струи диэлектрической жидкости, напротив, повышает ее устойчивость [21,22].

Влияние величины напряженности продольного внешнего поля, характеризующейся параметром w , на устойчивость струи при учете эффекта релаксации электрического заряда проиллюстрировано рис. 1, а. Мнимая часть комплексной частоты $\omega \equiv |\text{Im}(s)|$ характеризует циклическую частоту, а ее вещественная часть $\beta \equiv \text{Re}(s)$ — инкремент либо декремент в зависимости от знака. Из приведенных зависимостей видно, что с ростом w область существования неустойчивых волн действительно сужается; ее правая граница смещается в область малых волновых чисел. В отсутствии явления поверхностной релаксации заряда для малых k (т.е. для длинных волн)

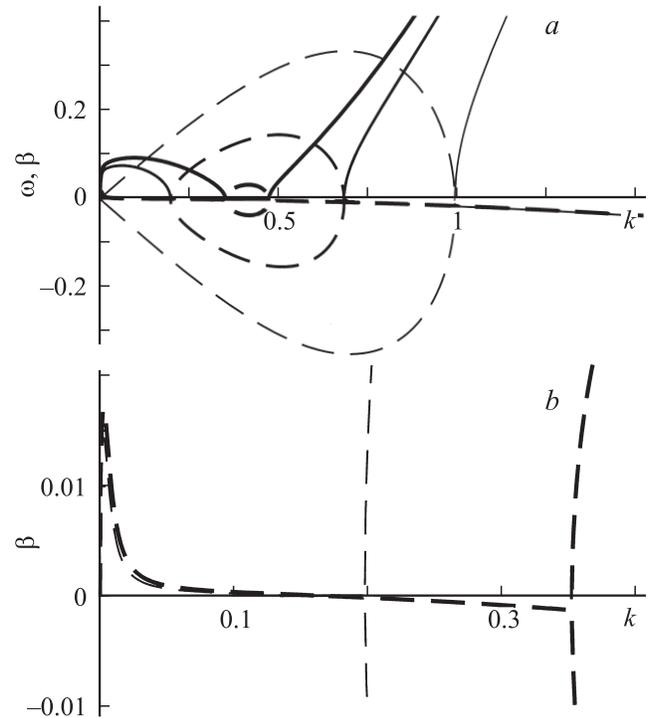


Рис. 1. а — зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных: ω — частоты, β — декрементов ($\beta < 0$ и $\beta > 0$), рассчитанные при $m = 0$; $\nu = 0.01$; $\sigma = 100$; $W = 0$; $\epsilon_{\text{ex}} = 1$; $\epsilon_{\text{in}} = 20$; $D = 0$ и различных значениях полевого параметра w . Штриховыми линиями обозначены зависимости от k инкремента и декремента, сплошными — частоты. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов частоты при $w = 0$, линиями средней толщины — при $w = 0.01$, жирными — при $w = 0.0135$. б — зависимости от безразмерного волнового числа k инкрементов неустойчивости релаксационных волн, рассчитанные при тех же значениях физических параметров, что и на рис. 1, а.

реализуемая аperiodическая „капиллярная“ неустойчивость (тонкая штриховая линия на рис. 1, *a*). Учет движения заряда вдоль поверхности приводит к тому, что область „капиллярной“ аperiodической неустойчивости уменьшается и со стороны длинных волн: ее левая граница смещается от точки $k = 0$ вправо. Одновременно вблизи нулевого значения k появляется область периодической „релаксационной“ неустойчивости с очень небольшими по абсолютной величине инкрементами. При этом области „капиллярной“ и „релаксационной“ неустойчивости не перекрываются, их разделяет узкий диапазон „устойчивых“ волн от $k \approx 0.2$ до ≈ 0.35 (см. рис. 1, *b*), где в более крупном масштабе приведены инкременты–декременты релаксационных волн (две почти вертикальные линии при $k \approx 0.2$ и 0.35 соответствуют инкрементам–декрементам капиллярно-электростатических движений жидкости). Инкременты капиллярно-электростатической неустойчивости на рис. 1, *a* имеют существенно большую величину и расположены в области $\beta > 0$, симметрично относительно оси абсцисс с декрементами затухания, лежащими в области $\beta < 0$. Из рис. 1, *a* видно также, что увеличение внешнего продольного поля (увеличение параметра w) быстро снижает инкременты неустойчивых волн и уменьшает значения волновых чисел, обладающих максимальными инкрементами k_{\max} . Выполненные оценки показывают, что для значений параметров w , которые были использованы при расчетах графиков, приведенных на рис. 1, *a* $w = \{0; 0.01; 0.0135\}$, максимальными инкрементами обладают волны с волновыми числами $k_{\max} = \{0.69; 0.50; 0.42\}$ и инкрементами $\beta_{\max} = \{0.34; 0.15; 0.03\}$ соответственно. Это должно приводить к увеличению длины не распавшегося участка струи непосредственно за соплом, из которого в экспериментах вытекает струя, что полностью согласуется с экспериментальными данными [23,24].

Дестабилизирующая роль поверхностного заряда видна из рис. 2, *a*: диапазон неустойчивых волновых чисел расширяется с ростом зарядового параметра W , хотя это влияние значительно слабее, чем влияние продольного поля. Появление отличного от нуля продольного электрического поля приводит к тому, что неустойчивость капиллярных волн на поверхности струи становится колебательной (рис. 2, *b*). Увеличение плотности поверхностного заряда приводит к уменьшению длины наиболее неустойчивой волны (k_{\max} растет) и к увеличению скорости нарастания ее амплитуды (β_{\max} тоже растет).

Отметим, что при ненулевых значениях параметров w и W кроме корней, приведенных на рис. 1 и 2, дисперсионное уравнение имеет и другие корни, соответствующие быстро затухающим (и потому практически не реализующимся) квазипериодическим (с частотой много меньшей декремента затухания) либо аperiodическим движениям поверхности.

На рис. 3 приведены зависимости, иллюстрирующие влияние на устойчивость струи проводимости жидкости.

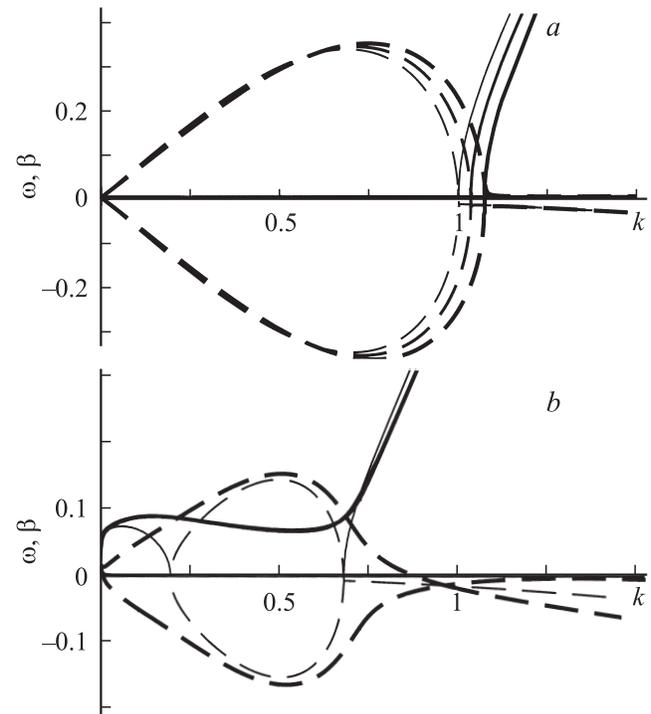


Рис. 2. *a* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $m = 0$; $\sigma = 100$; $w = 0$; $\epsilon_{\text{ex}} = 1$; $\epsilon_{\text{in}} = 20$; $D = 0$ и различных значениях зарядового параметра W . Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $W = 0$, линиями средней толщины — при $W = 0.15$, жирными — при $W = 0.03$. *b* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при отличном от нуля полевом параметре: $w = 0.01$. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $W = 0$, жирными — при $W = 0.15$.

Отметим сразу, что это влияние становится заметным лишь при достаточно малых значениях безразмерной проводимости ($\sigma < 10$). Из рис. 3, *a* видно, что в отсутствие заряда уменьшение проводимости струи, находящейся в продольном электрическом поле, приводит, во-первых, к расширению спектра неустойчивых волн в область коротких длин, где реализуется колебательная неустойчивость (в диапазоне волновых чисел от $k \approx 0.7$ до 1.3 при значениях физических параметров, использованных в расчете) и, во-вторых, к увеличению инкрементов нарастания аperiodической неустойчивости. В области длинных волн ($k < 0.2$) уменьшение проводимости приводит к существенному увеличению инкрементов периодической неустойчивости и уменьшению частот.

Как следует из рис. 3, *b*, для заряженной струи в отсутствие продольного электрического поля уменьшение проводимости жидкости приводит к появлению дополнительных неустойчивых движений поверхности релаксационного происхождения. И если в области длинных волн ($k < 1$) инкремент „релаксационной“ неустойчивости (ветвь 3) существенно ниже инкремента „гидродинамической“ (ветвь 2), то в области коротких

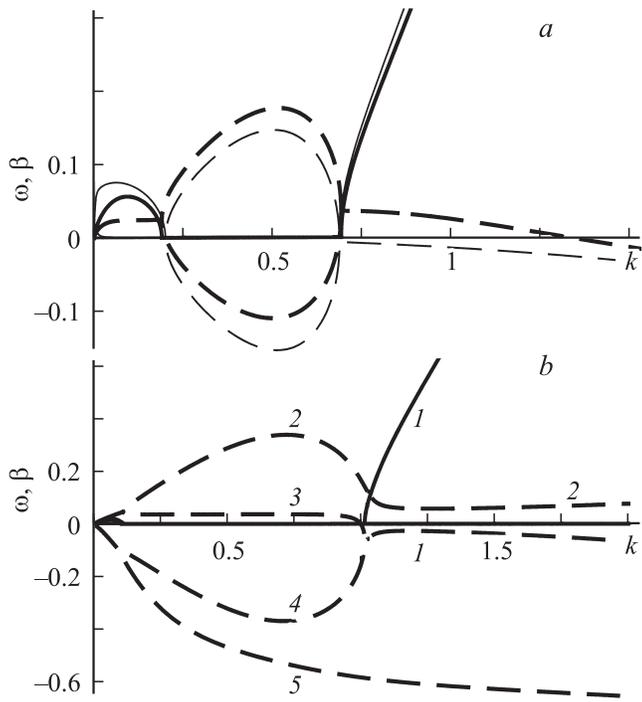


Рис. 3. *a* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $m = 0$; $W = 0$; $w = 0.01$; $\varepsilon_{ex} = 1$; $\varepsilon_{in} = 20$; $D = 0$ и различных значениях проводимости. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $\sigma = 100$, жирными — при $\sigma = 1$. *b* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $m = 0$; $W = 0.15$; $w = 0$; $\varepsilon_{ex} = 1$; $\varepsilon_{in} = 20$; $\sigma = 1$.

волн ($k > 1$) само существование неустойчивого решения связано с учетом эффекта поверхностной релаксации заряда (продолжение ветви 2 после ее пересечения с ветвью частот капиллярных волн 1, которые в указанном диапазоне волновых чисел являются затухающими). Таким образом, короткие релаксационные волны на поверхности заряженной струи слабо проводящей жидкости неустойчивы. Отметим, что периодическими обе ветви неустойчивых решений являются только в малой окрестности точки $k = 0$. Отличная от нуля циклическая частота в области $k > 1$ соответствует слабо затухающему корню, а быстро затухающий корень (ветвь 5) является аperiodическим. Ветвь 4 соответствует аperiodическому затуханию капиллярных волн. Влияние проводимости на длину наиболее неустойчивой волны сводится к ее незначительному уменьшению для плохо проводящих жидкостей, а также к увеличению соответствующего ей инкремента.

Расчеты показали, что влияние диэлектрической проницаемости жидкости имеет смысл рассматривать только при наличии внешнего продольного электрического поля (рис. 4). В этом случае увеличение ε_{in} повышает устойчивость струи и расширяет спектр периодических волновых движений. Следует обратить внимание, что на

рис. 4 в области малых k все штриховые линии лежат выше оси абсцисс, т.е. описывают очень малые инкременты, соответствующие длинноволновым неустойчивым возмущениям поверхности. Увеличение диэлектрической проницаемости струи оказывает на волновое число наиболее неустойчивой волны и ее инкремент такое же влияние, как и увеличение напряженности продольного электрического поля.

Вклад явления диффузии в картину капиллярных осцилляций струи логично оценивать при малых значениях безразмерной проводимости струи, поскольку значения коэффициентов диффузии, как правило, очень малы (для диффузии в воде составляют $\sim 10^{-5} - 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$ [25]). Значение безразмерной проводимости σ убывает с уменьшением радиуса струи, однако при этом увеличивается безразмерный параметр вязкости ν , который в то же время должен оставаться малым, поскольку упрощенное дисперсионное уравнение (24) получено в предположении $\nu \ll 1$. Так, например, для струи воды микронного радиуса значения безразмерных σ и ν составляют ~ 0.1 , при этом оценка безразмерного коэффициента диффузии дает величину $\sim 10^{-4} - 10^{-3}$. Расчеты показывают: для водяной струи с радиусом $1 \mu\text{m}$ влияние диффузии становится заметным при значениях безразмерного коэффициента диффузии $D \approx 10^{-2} - 10^{-1}$.

Согласно представленным на рис. 5, *a* зависимостям, увеличение коэффициента диффузии при наличии внешнего продольного электрического поля ($w \neq 0$), с одной стороны, сужает область „капиллярной“ периодической неустойчивости, реализующейся для длинных волн, и уменьшает ее инкременты, а в области устойчивости увеличивает декременты затухания капиллярных волн (ветви 1–3; ветви 1 и 2, соответствующие частотам, сливаются). С другой стороны, диффузия заряда вдоль поверхности может являться причиной возникновения аperiodической „релаксационной“ неустойчивости (ветви 4–6), проявляющейся для более коротких волн,

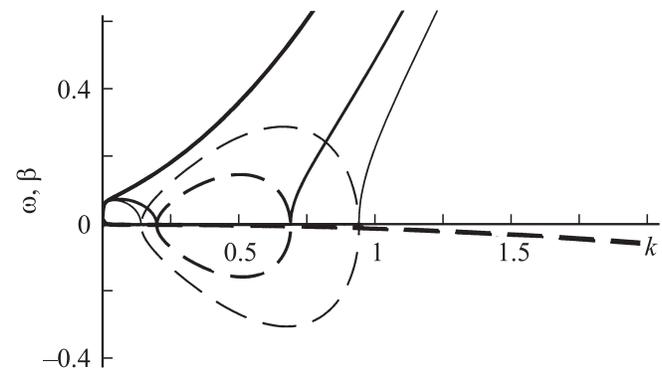


Рис. 4. Те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $m = 0$; $W = 0$; $w = 0.01$; $\varepsilon_{ex} = 1$; $D = 0$ и различных значениях диэлектрической проницаемости. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $\varepsilon_{in} = 2$, линиями средней толщины — при $\varepsilon_{in} = 20$, жирными — при $\varepsilon_{in} = 80$.

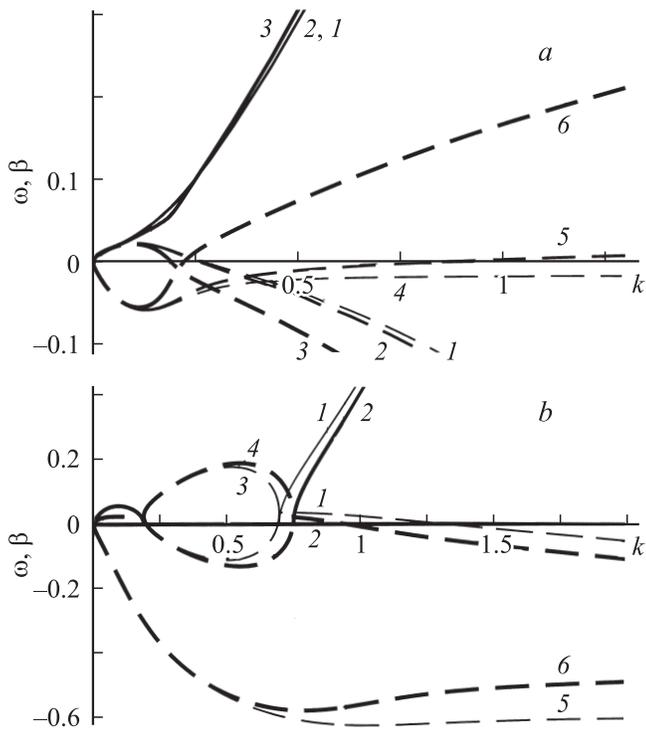


Рис. 5. *a* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $m = 0$; $W = 0$; $w = 0.01$; $\sigma = 0.1$; $\varepsilon_{ex} = 1$; $\varepsilon_{in} = 80$ и различных значениях коэффициента диффузии. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, линиями средней толщины — при $D = 0.01$, жирными — при $D = 0.1$. *b* — те же зависимости, что и на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\nu = 0.01$; $\sigma = 1$; $\varepsilon_{in} = 20$. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, жирными — при $D = 0.1$.

чем „капиллярная“ неустойчивость (ветви 1-3). При больших значениях коэффициента диффузии инкременты релаксационной неустойчивости (ветвь 6) больше инкрементов капиллярной неустойчивости (ветвь 3).

На рис. 5, *b* приведены аналогичные зависимости, рассчитанные при меньшем значении ν большем значении σ , из которых также видно, что увеличение диффузии по-разному действует на капиллярные и релаксационные ветви решения. Диапазон волновых чисел, для которых реализуется „капиллярная“ неустойчивость, сужается, при этом уменьшаются инкременты периодической „капиллярной“ неустойчивости (ветви 1, 2), но увеличиваются инкременты аperiodической „капиллярной“ неустойчивости (ветви 3, 4). Декременты аperiodических „релаксационных“ движений поверхности с ростом коэффициента диффузии уменьшаются (ветви 5, 6), однако при данных значениях параметров величины коэффициента диффузии, видимо, недостаточно, чтобы привести к „релаксационной“ неустойчивости. Следует отметить, что на картину поверхностных осцилляций струй хорошо проводящих жидкостей, а также струй различной проводимости в отсутствие продольного поля

($w = 0$) величина коэффициента диффузии оказывает очень незначительное влияние.

Заключение

В проведенном аналитическом исследовании устойчивости осесимметричных волн на поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью выяснено, что эффект релаксации поверхностного заряда существенно сказывается на динамике поверхности струй лишь слабо проводящих жидкостей при наличии внешнего продольного поля. Увеличение напряженности внешнего продольного электростатического поля сужает область волновых чисел k неустойчивых волн за счет смещения ее правой границы в область малых значений k . При наличии и радиального, и продольного электрического поля длинноволновые решения становятся неустойчивыми периодическими с малыми инкрементами

Учет феномена релаксации заряда приводит к появлению „чисто релаксационных“ решений, периодических либо аperiodических, характеризующихся большими декрементами, и потому соответствующих быстро затухающим движениям поверхности струи. Уменьшение проводимости жидкости увеличивает инкременты неустойчивых волн и расширяет их спектр в область малых длин; наличие на струе поверхностного заряда (радиального электрического поля) повышает неустойчивость поверхности струи. Наличие внешнего продольного электрического поля приводит к увеличению роли диэлектрической проницаемости жидкости: ее рост повышает устойчивость струи и расширяет спектр периодических волновых движений как устойчивых, так и неустойчивых.

Увеличение коэффициента поверхностной диффузии зарядов во внешнем продольном электрическом поле действует по-разному на капиллярные и релаксационные ветви решения: увеличивает декременты затухания первых и уменьшает декременты вторых. При больших значениях безразмерного коэффициента диффузии релаксационная ветвь решения может стать неустойчивой, причем, согласно расчетам, неустойчивость является аperiodической. На картину поверхностных осцилляций заряженной струи в отсутствие продольного поля величина коэффициента диффузии оказывает очень незначительное влияние.

Приложение

$$\alpha_1 = \varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k);$$

$$g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)} = m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)};$$

$$h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)} = m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)};$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 4\pi\sigma g_m(k) - D(k^2 + m^2)\alpha_1 \\ &\quad + b[4\pi\chi_0(k^2 + m^2) + ikE_0\alpha_1]; \\ \alpha_3 &= (s\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}; \quad \alpha_4 = \alpha_3(s\beta_1 + \beta_2); \\ \beta_1 &= \chi_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} g_m(k) \right) - ik \frac{E_0}{4\pi} (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}); \\ \beta_2 &= \sigma \left(\frac{4\pi\chi_0}{\varepsilon_{ex}} g_m(k) - ikE_0 \right) - D(k^2 + m^2)\beta_1 \\ &\quad + b \left(\frac{4\pi}{\varepsilon_{ex}} \chi_0^2 (k^2 + m^2) + k^2 \frac{E_0^2}{4\pi} (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) \right. \\ &\quad \left. - ikE_0\chi_0 \frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} g_m(k) \right); \\ \alpha_5 &= -\alpha_3(k^2 + m^2 - g_m(k)); \quad \alpha_6 = -im\alpha_3(1 - g_m(l)); \\ \alpha_7 &= ik\alpha_3(l^2 + m^2 - g_m(l)); \quad \alpha_8 = ik4\pi\chi_0 - E_0\alpha_1; \\ \alpha_9 &= E_0\beta_1 - ik \frac{4\pi\chi_0^2}{\varepsilon_{ex}}; \quad \alpha_{10} = 4\pi\chi_0 h_m(k) + ikE_0(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}); \\ \alpha_{11} &= \frac{\chi_0}{\varepsilon_{ex}} (4\pi\chi_0 + ikE_0(2\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})); \\ f_1 &= 1 - k^2 - m^2; \quad f_2 = 2k^2 + 2m^2 - g_m(k); \\ f_3 &= (\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})^2 g_m(k); \quad f_4 = f_3 - (\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})\alpha_1; \\ f_5 &= k^2 + 3m^2 + 2f_2 h_m(k) + 2\varepsilon_{in} f_6; \\ f_6 &= \frac{1}{\varepsilon_{ex}} [1 + h_m(k)] g_m(k)^2; \\ f_7 &= \left[1 + \frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} g_m(k) \right] (k^2 + m^2 + g_m(k) h_m(k)); \\ f_8 &= 2(k^2 + m^2)^2 - (k^2 + 3m^2) g_m(k); \quad f_9 = 1 - 2g_m(k); \\ f_{10} &= k^2 + m^2 + (1 - g_m(k) + 2h_m(k)) g_m(k); \\ f_{11} &= (\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})(k^2 + m^2 - g_m(k)) \\ &\quad + \alpha_1 \left[1 - \left(1 - 2 \frac{\varepsilon_{in}}{\varepsilon_{ex}} \right) g_m(k) \right]. \end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке грантов Рособразования № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ (№ 09-01-00084 и 09-08-00148).

Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [3] Eggers J., Willermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036 601. P. 1–79.

- [4] Saville D.A. // Phys. of Fluids. 1970. Vol. 13. N 12. P. 2987–2994.
- [5] Saville D.A. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827.
- [6] Гиневский А.Ф., Мотин А.И. // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 576–581.
- [7] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
- [8] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. N 2. P. 311–326.
- [9] Шкадов В.Я., Шутов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 29–40.
- [10] Shkadov V.Ya., Shutov A.A. // Fluid Dynamic Res. 2001. Vol. 28. P. 23–39.
- [11] Шутов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 52–67.
- [12] Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 33–41.
- [13] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
- [14] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [15] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
- [16] Masky W.A. // Proc. Roy. Soc. London. 1931. Vol. 133. N A822. P. 565–587.
- [17] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2010. 1800 с.
- [18] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [19] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 12. С. 12–30.
- [20] Ширяева С.О. // МЖГ. 2008. № 5. С. 14–29.
- [21] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 47–51.
- [22] Ширяева С.О. // МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.
- [23] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) // Proc. Roy. Soc. London. 1879. Vol. 28. P. 406–409.
- [24] Френкель Я.И. На заре новой физики. Л.: Наука, 1970. 384 с.
- [25] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Киойна. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.