

01;03

Равновесные конфигурации поверхности проводящей жидкости в неоднородном внешнем электрическом поле

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: nick@ami.uran.ru

(Поступило в Редакцию 21 сентября 2009 г. В окончательной редакции 12 февраля 2010 г.)

Исследованы возможные равновесные конфигурации свободной поверхности проводящей жидкости, деформируемой неоднородным внешним электрическим полем. Жидкость находится на электроде, который представляет собой двугранный угол, образованный двумя пересекающимися эквипотенциальными полуплоскостями (т.е. проводящий клин). Считается, что задача обладает плоской симметрией: поверхность инвариантна по отношению к сдвигу вдоль направления ребра двугранного угла. Найдено однопараметрическое семейство точных решений для формы поверхности; параметром является угол раствора области над клином. Решения соответствуют случаю, когда разность давлений внутри и вне жидкости равна нулю. Для произвольной разности давлений построены приближенные решения задачи; продемонстрирована малость погрешности аппроксимации. Анализ решения показал, что при превышении разностью потенциалов некоторого порогового значения равновесных решений не существует. Занимаемая жидкостью область будет распадаться, причем сценарий распада зависит от угла раствора.

Введение

В работе рассматривается задача о геометрии свободной поверхности проводящей жидкости в неоднородном внешнем электрическом поле. Равновесная форма поверхности задается условием баланса электростатических и капиллярных сил. Важно определить, при каких условиях баланс сил возможен, а при каких — нет. В последнем случае занимаемая жидкостью область будет терять односвязность.

Сложность решения этой классической электростатической задачи связана с существенной нелинейностью граничных условий на свободной поверхности, которая, в свою очередь, неизвестна и подлежит определению. Ввиду отсутствия эффективных методов анализа подобных краевых задач к настоящему времени найдено лишь несколько точных частных решений для равновесных конфигураций заряженной границы проводящей жидкости.

Опишем кратко состояние исследований в этой области, уделяя основное внимание точным результатам. Очевидно, что тривиальными решениями задачи являются плоскость, круговая цилиндрическая поверхность и сфера. К нетривиальным осесимметричным решениям можно отнести так называемый конус Тейлора [1]. На поверхности конуса с углом раствора 98.6° электростатическое давление обратно пропорционально расстоянию от вершины и, следовательно, может уравновешиваться поверхностным давлением (исключение составляет особая точка — вершина конуса, в которой условие баланса сил нарушается).

Наибольший прогресс в анализе равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в электрическом поле наметился для плоской геометрии задачи, когда все величины зависят лишь от двух декартовых

координат. Он связан с использованием конформных преобразований, которые позволяют свести задачу с неизвестной границей к задаче с границей, представляющей собой в сечении прямую либо окружность. В рамках подобного подхода в работах [2,3] был найден широкий класс точных решений задачи о форме азимутально-деформированной заряженной струи проводящей жидкости.

Необходимо отметить, что с математической точки зрения обсуждаемая электростатическая задача в плоской геометрии эквивалентна классической задаче механики сплошных сред о конфигурации области постоянного давления, обтекаемой невязкой несжимаемой жидкостью. Это позволяет использовать ряд полученных в гидродинамике результатов при изучении влияния электростатических сил на геометрию заряженной границы жидкого проводника. Так, известны:

— частное решение для профиля двумерного пузыря, обтекаемого однородным потоком идеальной жидкости [4];

— семейства решений для профиля капиллярных волн на поверхности жидкости бесконечной [5] и конечной [6] глубины;

— ряд решений для волн на искривленной границе жидкости [7–10].

В электростатической интерпретации они описывают соответственно конфигурации незаряженной струи в поперечном электрическом поле [11,12], периодические структуры на поверхности проводящей жидкости в вертикальном электрическом поле [2,13,14] и т.п.

Настоящая работа посвящена исследованию возможных равновесных конфигураций свободной поверхности проводящей жидкости, находящейся между двумя пересекающимися эквипотенциальными полуплоскостями (иными словами, на представляющем собой двугранный

угол электроде). Форма границы жидкости зависит от приложенной к ней разности потенциалов и угла раствора между образующими клин плоскостями. Будем считать, что поверхность инвариантна по отношению к сдвигам вдоль ребра клина, а деформация поверхности происходит только в плоскости сечения, перпендикулярной ребру. В плоскости поперечного сечения область, занимаемая жидкостью, оказывается ограниченной. Ниже, рассматривая геометрию сечения жидкости, будем иногда использовать термин „двумерная капля“, имея в виду определенную аналогию с поведением капель в электрическом поле [15].

Аналогом этой электростатической задачи в гидродинамике является задача о стационарной форме поверхности пузыря, расположенного в вершине угла между двумя стенками, и деформируемого потенциальным потоком обтекающей его жидкости. Она исследовалась численными методами для развернутого и прямого угла раствора в работах [16,17] и для произвольного угла раствора в работе [18]. Частные точные решения для формы пузыря, согласующиеся с результатами [18], были найдены в нашей недавней работе [19].

Исходные уравнения

Рассмотрим проводящую жидкость, расположенную в вершине угла между двумя пересекающимися проводящими полуплоскостями. Пусть Θ — угол раствора между плоскостями (иными словами, линейный угол). Он может быть как больше, так и меньше π . В первом случае имеет место проводящий клин, а во втором случае — клиновидное углубление в поверхности проводника. При $\Theta = \pi$ жидкость будет находиться на плоском электроде. В этом частном случае внешнее электрическое поле является однородным.

Будем считать, что контактный угол между свободной поверхностью капли и поверхностью электрода равен $\pi/2$. В отсутствие внешнего электрического поля равновесной конфигурацией жидкости является сегмент цилиндра с круглым поперечным сечением. Положим, что его радиус равен R_0 . При наличии внешнего поля свободная поверхность будет деформироваться электростатическими силами. При этом вследствие несжимаемости среды инвариантом будет площадь поперечного сечения жидкости, равная $\Theta R_0^2/2$.

Пусть $\{x, y, z\}$ — прямоугольная система координат, ось z которой совпадает с ребром клина. Считаем, что задача обладает плоской симметрией, т.е. все величины зависят лишь от переменных x и y . В этих координатах занимаемая жидкостью область является ограниченной, и будем говорить о ней как о „двумерной капле“. Распределение потенциала электрического поля Φ в плоскости $\{x, y\}$ задается двумерным уравнением Лапласа

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.$$

Его следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности клина и свободной поверхности

капли, $\Phi = 0$. На бесконечности потенциал электрического поля будет иметь следующий вид:

$$\Phi \rightarrow U(R/R_0)^\gamma \sin(\gamma\theta), \quad R \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\gamma \equiv \pi/\Theta \geq 1/2$, а $\theta \equiv \arctan(y/x)$ — угол в полярной системе координат. Граням клина соответствуют значения углов $\theta = 0$ и $\theta = \Theta$. В отсутствие капли выражение (1) превратилось бы в равенство. Величина U при этом носила бы смысл потенциала электрического поля на расстоянии R_0 от вершины угла в плоскости симметрии $\theta = \Theta/2$. Таким образом, эта величина характеризует внешнее поле, деформирующее каплю, и играет роль внешнего управляющего параметра.

Равновесная конфигурация свободной поверхности проводящей жидкости определяется условием баланса электростатических и капиллярных давлений, действующих на поверхность:

$$\varepsilon_0(\nabla\Phi)^2/2 + Tk + P = 0. \quad (2)$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения, k — кривизна свободной поверхности, P — разность давлений внутри и вне капли, а ε_0 — электрическая постоянная. В отсутствие внешнего поля, т.е. когда $U = 0$, давление определяется простым выражением: $P = T/R_0$. Для поверхности, задаваемой следующими параметрическими выражениями:

$$y = Y(\tau), \quad x = X(\tau),$$

с параметром τ , возрастающим в направлении против часовой стрелки, кривизна определяется формулой:

$$k = \frac{Y_\tau X_{\tau\tau} - X_\tau Y_{\tau\tau}}{(X_\tau^2 + Y_\tau^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

Для удобства перейдем к безразмерным переменным посредством следующих замен:

$$R = R_0 r, \quad \Phi = U\phi, \quad P = TR_0^{-1}p.$$

Введем в рассмотрение комплексный потенциал электрического поля $\omega = \psi + i\phi$, который является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$. Функция ψ является гармонически сопряженной к потенциалу электрического поля ϕ ; условие $\psi = \text{const}$ задает силовые линии поля. В соответствии с (1) потенциал ω удовлетворяет следующему условию на бесконечности:

$$\omega \rightarrow z^\gamma, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Условие баланса давлений на свободной поверхности капли (2) может быть переписано в виде

$$\frac{A}{2} \left| \frac{d\omega}{dz} \right|^2 + k + p = 0, \quad (4)$$

где $A \equiv U^2 \varepsilon_0 / (TR_0)$ — безразмерный комплекс, играющий роль внешнего управляющего параметра (фактически он задает отношение характерных электростатического и капиллярного давлений).

Следующим шагом решения задачи будет конформное преобразование $z = z(\xi)$ области вне жидкости в область вне круга единичного радиуса в комплексной ξ -плоскости. При этом потребуем, чтобы преобразование отображало грани клина на прямые $\arg \xi = 0$ и $\arg \xi = \Theta$, т.е. чтобы они оставались на прежних местах. В результате подобного преобразования задача нахождения комплексного потенциала с условием $\text{Im } \omega = 0$ на неизвестной нам свободной поверхности проводящей жидкости и на гранях проводящего клина сводится к задаче с аналогичным условием на дуге единичной окружности $|\xi| = 1$ и на линиях $\arg \xi = 0$ и $\arg \xi = \Theta$. Ее решение дается соотношением

$$\omega = \lambda^\gamma \left(\xi^\gamma + \frac{1}{\xi^\gamma} \right), \quad (5)$$

где λ — вещественная константа, значение которой определим исходя из условия, что при деформации поверхности, связанной с изменением внешнего управляющего параметра A , площадь поперечного сечения (т.е. сечения плоскостью $\{x, y\}$) s не изменяется. При любых A будет

$$s = \pi/(2\gamma). \quad (6)$$

Естественно параметризовать дугу окружности $|\xi| = 1$, соответствующую свободной поверхности в отображаемой плоскости, следующим образом: $\xi = e^{i\tau}$, где $\tau \equiv \arg \xi$ — вещественный параметр, изменяющийся в интервале $0 \leq \tau \leq \pi/\gamma$. Тогда форма свободной поверхности будет задаваться следующим параметрическим выражением:

$$z = z(e^{i\tau}) \equiv Z(\tau) \equiv X(\tau) + iY(\tau).$$

Условие баланса давлений (4) переписывается в виде:

$$\frac{A}{2} \left| \frac{d\omega}{d\xi} \right|^2 + \frac{\text{Im}(Z_\tau \bar{Z}_{\tau\tau})}{|Z_\tau|} + p|Z_\tau|^2 = 0, \quad |\xi| = 1, \quad (7)$$

где использована формула (3) для кривизны k , а также учтено, что

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \left| \frac{d\omega}{d\xi} \right| \left| \frac{dz}{d\xi} \right|^{-1}.$$

В итоге задача о нахождении устойчивого профиля заряженной поверхности проводящей жидкости свелась к нахождению аналитической функции $z = z(\xi)$, которая на свободной поверхности удовлетворяет условию (7), а на гранях проводящего клина и на бесконечности условиям

$$\arg z = 0, \quad \tau = 0, \quad (8)$$

$$\arg z = \pi/\gamma, \quad \tau = \pi/\gamma, \quad (9)$$

$$z \rightarrow \lambda\xi, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Задача существенно упрощается при введении вспомогательной функции $g(\xi) \equiv \sqrt{i\xi z_\xi}$. Введем также комплексную функцию $G(\tau) \equiv g(e^{i\tau})$, которая задает значения функции g на границе $|\xi| = 1$. Получим вместо (7)–(10):

$$\gamma^2 \lambda^{2\gamma} A(1 - \cos 2\gamma\tau) = i(G\bar{G}_\tau - \bar{G}G_\tau) - p(G\bar{G})^2. \quad (11)$$

$$\arg g = \pi/4, \quad \tau = 0, \quad (12)$$

$$\arg g = \pi/4 + \pi(2\gamma), \quad \arg \xi = \pi/\gamma, \quad (13)$$

$$g \rightarrow \sqrt{i\lambda\xi}, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

При выводе уравнения (11) использовано решение для распределения поля (5). С учетом (12)–(14) аналитическая функция $g(\xi)$ может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$g(\xi) = \sqrt{i\lambda\xi} \left(1 + \frac{a_1}{\xi^{2\gamma}} + \frac{a_2}{\xi^{4\gamma}} + \dots \right),$$

где a_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) — вещественные постоянные. Это выражение соответствует поверхности, обладающей зеркальной симметрией относительно плоскости $\theta = \Theta/2$. В терминах функции G это соответствует представлению

$$G(\tau) = \sqrt{i\lambda} e^{i\tau/2} (1 + a_1 e^{-2i\gamma\tau} + a_2 e^{-4i\gamma\tau} + \dots). \quad (15)$$

Данное выражение определяет форму, в которой следует искать решение ключевого уравнения (11).

Уравнение для профиля свободной поверхности $z = Z(\tau)$ находится по функции $G(\tau)$ из уравнения

$$dZ/d\tau = G^2. \quad (16)$$

При этом требование (6) накладывает следующее условие на решения:

$$-\frac{1}{2} \text{Im} \int_0^{\pi/\gamma} Z \bar{Z}_\tau d\tau = \frac{\pi}{2\gamma}. \quad (17)$$

Здесь использовано известное соотношение для вычисления площади через контурный интеграл

$$s = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\gamma} (XY_\tau - YX_\tau) d\tau,$$

являющийся следствием формулы Грина.

Точные решения

В предыдущем разделе было показано, что задача нахождения равновесной конфигурации заряженной поверхности двумерной проводящей капли сводится к анализу уравнения (11), причем его решение представимо в виде ряда (15).

В тривиальном случае, когда внешнего электрического поля нет ($A = 0$ и $p = 1$), решение имеет простой вид:

$$G(\tau) = e^{i\pi/4 + i\tau/2}. \quad (18)$$

Известно нетривиальное решение задачи, соответствующее $\gamma = 1$ и $p = 0$ [4]. Это решение описывает форму

струи проводящей жидкости в поперечном электрическом поле [11]. В обозначениях настоящей работы оно задается выражением

$$G(\tau) = (243/134)^{1/4} e^{i\pi/4+i\tau/2} (1 + e^{-2i\tau}/3). \quad (19)$$

Найдем точные решения для формы поверхности, соответствующие $p = 0$ и произвольному значению параметра γ . При нулевой разности давлений уравнение (11) существенно упрощается; исчезают нелинейные члены четвертого порядка:

$$\gamma^2 \lambda^{2\gamma} A (1 - \cos 2\gamma\tau) = i(G\bar{G}_\tau - \bar{G}G_\tau). \quad (20)$$

Для обоих известных точных решений (18) и (19) ряд (15) содержит конечное число слагаемых. Будем по аналогии искать решение уравнения (20), ограничивая число членов ряда (15). Пусть

$$G(\tau) = \sqrt{i\lambda} e^{i\tau/2} (1 + a e^{-2i\gamma\tau}), \quad (21)$$

где a — вещественная константа. При $a = 0$ и $\lambda = 1$ это выражение совпадает с (18), а при $a = 1/3$, $\gamma = 1$ и $\lambda = \sqrt{243/134}$ оно совпадает с (19).

Подставив (21) в (20) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках в получившемся выражении, получим уравнения, связывающие параметры задачи A , λ , γ и a :

$$\begin{aligned} A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 &= 1 - a^2(4\gamma - 1), \\ A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 &= 2a(2\gamma - 1). \end{aligned}$$

Отсюда находим для a и A :

$$a = \frac{1}{4\gamma - 1}, \quad A = \frac{2(2\gamma - 1)}{\gamma^2(4\gamma - 1)\lambda^{2\gamma-1}}. \quad (22)$$

Выражения (21) и (22) дают искомое точное решение уравнения (20). Зависимость параметра λ , входящего в (22), от γ находится из условия нормировки площади s (17).

Форму свободной поверхности можно найти из выражений (21) и (22) при помощи соотношения (16). Интегрирование по τ дает:

$$Z(\tau) = \lambda e^{i\tau} - \frac{2\lambda e^{-i(2\gamma-1)\tau}}{(2\gamma-1)(4\gamma-1)} - \frac{\lambda e^{-i(4\gamma-1)\tau}}{(4\gamma-1)^3}. \quad (23)$$

Для площади s этого решения получим

$$s = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{\pi/\gamma} Z\bar{Z}_\tau d\tau = \frac{\pi\lambda^2}{2\gamma} \left(1 - a^5 - \frac{4a^2}{2\gamma-1} \right).$$

Условие нормировки площади (6) приводит к следующему выражению для λ :

$$\lambda = \left(1 - \frac{4}{(2\gamma-1)(4\gamma-1)^2} - \frac{1}{(4\gamma-1)^5} \right)^{-1/2}. \quad (24)$$

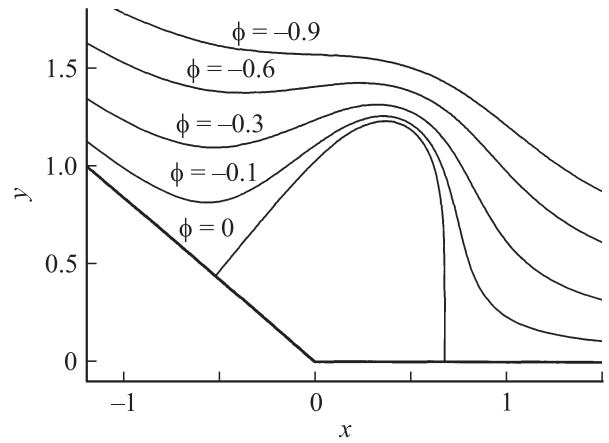


Рис. 1. Профиль свободной поверхности капли для $\Theta \approx 140^\circ$ ($\gamma = \gamma_s \approx 1.285$). Также изображены эквипотенциальные поверхности $\phi = -0.1, -0.3, -0.6, -0.9$.

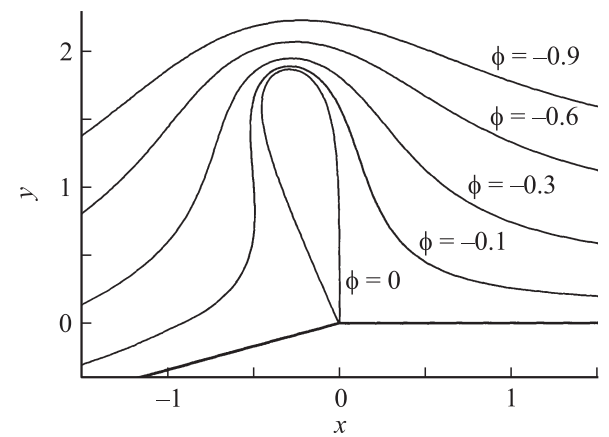


Рис. 2. Профиль свободной поверхности капли для $\Theta \approx 199^\circ$ ($\gamma = \gamma_c \approx 0.905$). Также изображены эквипотенциальные поверхности $\phi = -0.1, -0.3, -0.6, -0.9$.

Отделив вещественную часть от мнимой в уравнении $z = Z(\tau)$, получим из (23) следующие параметрические выражения для равновесной поверхности:

$$\begin{aligned} x = X(\tau) &= \lambda \cos \tau - \frac{2\lambda \cos(2\gamma-1)\tau}{(2\gamma-1)(4\gamma-1)} - \frac{\lambda \cos(4\gamma-1)\tau}{(4\gamma-1)^3}, \\ y = Y(\tau) &= \lambda \sin \tau + \frac{2\lambda \sin(2\gamma-1)\tau}{(2\gamma-1)(4\gamma-1)} + \frac{\lambda \sin(4\gamma-1)\tau}{(4\gamma-1)^3}, \end{aligned}$$

где τ изменяется в диапазоне $0 \leq \tau \leq \pi/\gamma$. Характерные равновесные поверхности для капли при различных значениях параметра γ приведены на рис. 1 и 2.

Рассмотрим распределение электрического поля вокруг капли. Уравнение (23) соответствует следующему выражению для функции $z(\xi)$:

$$z(\xi) = \lambda \xi - \frac{2\lambda \xi^{1-2\gamma}}{(2\gamma-1)(4\gamma-1)} - \frac{\lambda \xi^{1-4\gamma}}{(4\gamma-1)^3}. \quad (25)$$

Оно вместе с выражением (5) для комплексного потенциала электрического поля $\omega(\xi)$ позволяет постро-

ить эквипотенциальные поверхности $\phi = \text{const}$. Пусть $\xi = \rho e^{i\tau}$, где ρ — вещественная переменная, равная единице на поверхности капли. Рассматривая мнимую часть выражения (5), получим для ρ :

$$\rho = \left[\frac{\phi + \sqrt{\phi^2 + 4\lambda^{2\gamma} \sin^2 \gamma \tau}}{2\lambda^\gamma \sin \gamma \tau} \right]^{1/\gamma}. \quad (26)$$

Уравнения эквипотенциальных поверхностей получают-ся из (25) в результате замены ξ на $\rho e^{i\tau}$, где ρ задается выражением (26). В итоге правая часть (25) будет содержать два параметра: ϕ и τ . Искомые поверхности соответствуют изменению τ в интервале $0 < \tau < \pi/\gamma$ при фиксированном ϕ . Следует отметить, что грани проводящего клина ($\theta = 0$ и $\theta = \Theta$), а также свободная поверхность капли соответствуют эквипотенциальной поверхности $\phi = 0$. Семейства эквипотенциалей для различных углов Θ приведены на рис. 1 и 2. Силовые линии электрического поля $\psi = \text{const}$ могут быть построены аналогичным образом. Для этого необходимо получить выражение для ρ из вещественной части (5).

Анализ точных решений

В предыдущем разделе нами получено семейство точных решений для формы заряженной двумерной капли проводящей жидкости, находящейся на пересечении двух проводящих полуплоскостей (в клиновидном углублении в проводнике при $\Theta < \pi$ и на острие клиновидного электрода при $\Theta > \pi$). Эти решения соответствуют частному случаю, когда разность давлений внутри и вне капли p равна нулю, а контактный угол между поверхностью электрода и свободной поверхностью равен $\pi/2$. Особенностью полученного семейства решений является нулевая кривизна поверхности в точках касания. Действительно, напряженность электрического поля в этих точках обращается в нуль и, как видно из условия баланса давлений (4), при $p = 0$ будет $k = 0$. Решения для формы поверхности, задаваемые выражением (23), существуют только при достаточно больших значениях параметра γ . Его минимальное значение (γ_c) соответствует появлению на поверхности точки самопересечения. Для $\gamma < \gamma_c$ решение задачи теряет физический смысл. Пороговое значение γ можно найти из условия $Z(0) = 0$. Его мнимая часть дает тождество, в то время как вещественная часть, $X(0) = 0$, приводит к уравнению

$$\gamma^2(16\gamma^2 - 20\gamma + 5) = 0.$$

Единственным корнем этого уравнения, удовлетворяющим условию $\gamma > 1/2$ (т.е. $0 < \Theta < 2\pi$), является

$$\gamma_c = (5 + \sqrt{5})/8 \approx 0.905.$$

Данное значение параметра γ соответствует углу раствора Θ , равному $\pi/\gamma_c \approx 199^\circ$. Таким образом, точное решение (23) обобщает полученное ранее решение,

соответствующее $\Theta = \pi$ [4], на случай углов в диапазоне $0 < \Theta \leq 199^\circ$.

Проведем теперь качественное исследование полученных нами решений на устойчивость по отношению к возмущениям, не нарушающим плоскую симметрию задачи. Рассмотрим для этого равновесные конфигурации капли при отличном от нуля, но малом значении разности давлений p . Решение будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру p . В частном случае, когда $\gamma = 1$, подобное разложение строилось в работах [20] для деформируемых потоком жидкостей пузырей. Существенным отличием от рассматриваемой нами задачи являлось то обстоятельство, что при деформации пузырей площадь их поперечного сечения не обязана сохраняться.

Ограничимся учетом членов нулевого и первого порядка в разложении по параметру p . Это соответствует тому, что решение уравнения (11) ищется в виде

$$G = \sqrt{i\lambda} e^{i\tau/2} (1 + (a_0 + \alpha p)e^{-2i\gamma\tau} + \beta p e^{-4i\gamma\tau}) + O(p^2). \quad (27)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 p + O(p^2), \quad A = A_0 + A_1 p + O(p^2), \quad (28)$$

где нижний индекс „0“ соответствует выражениям (22) и (24) для параметров точного решения, которое выбирается в качестве нулевого приближения. Коэффициенты α, β, λ_1 и A_1 соответствуют первому порядку теории возмущений.

Подставив (27) и (28) в (11) и затем приравняв коэффициенты при различных (нулевой, второй и четвертой) гармониках, получим в порядке $O(p)$:

$$\sigma = -2\alpha - \lambda_0(1 + 4a_0^2 + a_0^4),$$

$$\sigma = 2a_0(6\gamma - 1)\beta + 2(2\gamma - 1)\alpha + 4\lambda_0 a_0(1 + a_0^2),$$

$$0 = (4\gamma - 1)\beta + \lambda_0 a_0^2,$$

где для удобства обозначено

$$\sigma = \gamma^2 \lambda_0^{2\gamma-2} [\lambda_0 A_1 + A_0(2\gamma - 1)\lambda_1]. \quad (29)$$

Отсюда находим для α, β и σ :

$$\alpha = -\lambda_0 a_0(1 + 3a_0 + a_0^2), \quad (30)$$

$$\beta = -\lambda_0 a_0^3, \quad (31)$$

$$\sigma = -\lambda_0(1 - 2a_0 - 2a_0^2 - 2a_0^3 + a_0^4). \quad (32)$$

Параметр λ_1 определяется из условия нормировки (17). Подставив в него получаемое при помощи (16) выражение для Z , получим в результате разложения по p :

$$\lambda_1 = -2a_0^2 \lambda_0^4 \left[\frac{2(1 + 3a_0 + a_0^2)}{2\gamma - 1} + a_0^3(1 + 4a_0 + a_0^2) \right]. \quad (33)$$

Наконец, коэффициент A_1 находим из (29), (32) и (33):

$$A_1 = \frac{4a_0^3(2\gamma - 1)^2}{\gamma^2 \lambda_0^{2\gamma}} \left[\frac{2(1 + 3a_0 + a_0^2)}{2\gamma - 1} + a_0^3(1 + 4a_0 + a_0^2) \right] - \frac{(1 - 2a_0 - 2a_0^2 - 2a_0^3 + a_0^4)}{\gamma^2 \lambda_0^{2\gamma-2}}.$$

В зависимости от знака этого коэффициента разность давлений p будет различным образом вести себя при изменении внешнего управляющего параметра A .

Найдем теперь длину свободной поверхности в поперечном сечении жидкости:

$$L = \int_0^{\pi/\gamma} \sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2} d\tau = \int_0^{\pi/\gamma} |Z_\tau| d\tau = \int_0^{\pi/\gamma} G \bar{G} d\tau.$$

Эту величину удобно использовать в качестве характеристики степени деформации капли. Подставив сюда (27), получим:

$$L = \frac{\pi\lambda_0}{\gamma} (1 + a_0^2) + \frac{\pi p}{\gamma} ((1 + a_0^2)\lambda_1 + 2\lambda_0 a_0 \alpha) + O(p^2).$$

Из (30) и (33) видно, что $\alpha \leq 0$ и $\lambda_1 \leq 0$ при любых γ . Это означает, что длина L всегда убывает с ростом разности давлений p . С учетом (28) находим, что усиление приложенного электрического поля приводит к увеличению деформации капли при $A_1 < 0$ и, напротив, к уменьшению ее деформации при $A_1 > 0$. Непосредственно отсюда следует вывод о том, что полученные нами точные решения устойчивы по отношению к малым возмущениям поверхности при $A_1 < 0$ и неустойчивы при $A_1 > 0$ (для устойчивых состояний системы увеличение приложенной внешней силы должно приводить к увеличению поверхностной энергии капли, т.е. к увеличению L).

Граница между устойчивыми и неустойчивыми решениями определяется условием $A_1 = 0$. При $\gamma \geq \gamma_c$ это уравнение имеет единственный корень, $\gamma = \gamma_s \approx 1.285$. При $\gamma > \gamma_s$ точные решения устойчивы по отношению к малым деформациям, а при $\gamma_c \leq \gamma < \gamma_s$ — неустойчивы. Неустойчивость решения при $\gamma = 1$ была продемонстрирована нами ранее в работе [11], в которой рассматривалась геометрия струи проводящей жидкости в поперечном электрическом поле.

Оценим вклад четвертой гармоники в разложение (27) для функции G . Для этого рассмотрим зависимость от γ отношения коэффициентов разложения при четвертой и второй гармониках, β и α соответственно (выражения (31) и (30)). Как оказывается, частное β/α монотонно убывает при увеличении γ , так что оно максимально при $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$. Примечательно, что даже в максимуме отношение коэффициентов довольно мало: оно равно примерно 0.064. Это даст нам основание в следующем разделе искать приближенное решение задачи при произвольном p без учета четвертой гармоники в разложении для G .

Полученные нами точные решения представляют наибольший интерес при относительно малых значениях параметра γ (т.е. при больших углах Θ). Это связано с тем, что, как несложно получить из (22)–(24),

$$Z \rightarrow e^{i\tau}, \quad A \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow \infty,$$

т.е. при больших γ решение становится близким к тривиальному, представляющему собой окружность, и реализуется при малых значениях внешнего управляющего

параметра A . В этом случае геометрию капли можно исследовать в рамках теории возмущений по малому параметру — амплитуде отклонения поверхности от окружности единичного радиуса.

Построение приближенных решений

В предыдущих разделах найдены и исследованы точные решения задачи, соответствующие нулевому значению разности давлений, $p = 0$. В настоящем разделе построим приближенные решения для произвольных p и оценим точность используемых аппроксимаций.

Будем искать приближенное решение уравнения (11) в форме, совпадающей с (21):

$$G = \sqrt{i\lambda} e^{i\tau/2} (1 + a e^{-2i\gamma\tau}), \quad (34)$$

т.е. ограничим число членов ряда (15) до двух. Основанием для использования подобного представления для функции G может служить проведенный выше анализ асимптотических разложений в окрестности точных решений, который продемонстрировал относительную малость вклада высоких гармоник при малых значениях параметра p .

Определяющая конфигурацию поверхности функция $Z(\tau)$, соответствующая представлению (34), находится из (16):

$$Z(\tau) = \lambda e^{i\tau} - \frac{2\lambda a e^{-i(2\gamma-1)\tau}}{2\gamma-1} - \frac{\lambda a^2 e^{-i(4\gamma-1)\tau}}{4\gamma-1}. \quad (35)$$

Площадь занимаемой жидкостью области в плоскости поперечного сечения $\{x, y\}$ есть

$$s = -\frac{1}{2} \text{Im} \int_0^{\pi/\gamma} Z \bar{Z}_\tau d\tau = \frac{\pi\lambda^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{4a^2}{2\gamma-1} - \frac{a^4}{4\gamma-1} \right).$$

Отсюда, с учетом нормировочного условия (6), находим для параметра λ :

$$\lambda = \left(1 - \frac{4a^2}{2\gamma-1} - \frac{a^4}{4\gamma-1} \right)^{-1/2}. \quad (36)$$

Подставив (34) в (11), приравняв коэффициенты при нулевой и второй гармониках и пренебрегая вкладом четвертой гармоники, получим следующие уравнения:

$$A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 = 1 - a^2(4\gamma-1) - p\lambda(1+4a^2+a^4),$$

$$A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 = 2a(2\gamma-1) + 4pa\lambda(1+a^2).$$

Отсюда можно выразить параметры p и A :

$$p = \frac{(1+a)(1-(4\gamma-1)a)}{\lambda(1+4a+4a^2+4a^3+a^4)}, \quad (37)$$

$$A = \frac{2a(1+2\gamma-(6\gamma-1)a^4)\lambda^{1-2\gamma}}{\gamma^2(1+4a+4a^2+4a^3+a^4)}, \quad (38)$$

что в сочетании с (34) и (36) дает искомое приближенное решение задачи.

Понятно, что можно было бы искать решение задачи с учетом более высоких гармоник в разложении (15). Тем не менее, несмотря на относительно простой вид, выражение (35) дает уже достаточно точную аппроксимацию для равновесной конфигурации капли при значении внешнего управляющего параметра A , определяемом соотношением (38). Точным решением становится при $a = 0$ и $a = 1/(4\gamma - 1)$. В первом случае оно совпадает с тривиальным решением, для которого $A = 0$ и $p = 1$. Во втором случае оно совпадает с полученными выше частными решениями, соответствующими условию $p = 0$. Как оказывается, многие физические интересные решения задачи относятся к интервалу $0 < a < 1/(4\gamma - 1)$ между двумя точными решениями. Это означает, что строится интерполяционное решение. Погрешность интерполяции обычно намного меньше погрешности экстраполяции. Именно по этой причине простейшая подстановка (34) обеспечивает аппроксимацию решения уравнения (11) с приемлемой точностью.

Действительно, оценим вклад четвертой гармоники, которой пренебрегли при выводе приближенного решения. В предыдущем разделе было показано, что при малом значении p амплитуда четвертой гармоники на порядок меньше, чем поправка к амплитуде второй гармоники. Предположим, что вклад четвертой гармоники окажется малым и в общем случае, когда p произвольно. Представим функцию G в виде:

$$G = \sqrt{i\lambda} e^{i\tau/2} (1 + a e^{-2i\gamma\tau} + b e^{-4i\gamma\tau}),$$

где нами добавлено еще одно слагаемое к представлению (34). Подставив это выражение в уравнение (11), приравняв коэффициенты при нулевой, второй и четвертой гармониках, получим следующую систему уравнений:

$$A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 = 1 - a^2(4\gamma - 1) - p\lambda(1 + 4a^2(1 + b) + a^4),$$

$$A\lambda^{2\gamma-1}\gamma^2 = 2a(2\gamma - 1 + b(6\gamma - 1))$$

$$+ 4p\lambda a(1 + a^2 + b(2 + a^2)),$$

$$0 = (4\gamma - 1)b + p\lambda(a^2 + 2b(1 + 2a^2)).$$

В этих уравнениях, ввиду предположения о малости вклада высоких гармоник, оставлены лишь линейные по коэффициенту разложения b слагаемые. Исключая из этой системы параметры A , λ и p , получим зависимость амплитуды b от параметров a и γ :

$$b = \frac{a^2(1+a)(a(4\gamma-1)-1)}{2+2a+4a^2+3a^3+(4\gamma-1)(1+2a+2a^2-3a^3-3a^4)}.$$

Определим относительную ошибку аппроксимации (34) как частное амплитуд четвертой (b) и второй (a) гармоник: $f \equiv |b/a|$. Рассмотрим поведение этой функции в интересующем нас

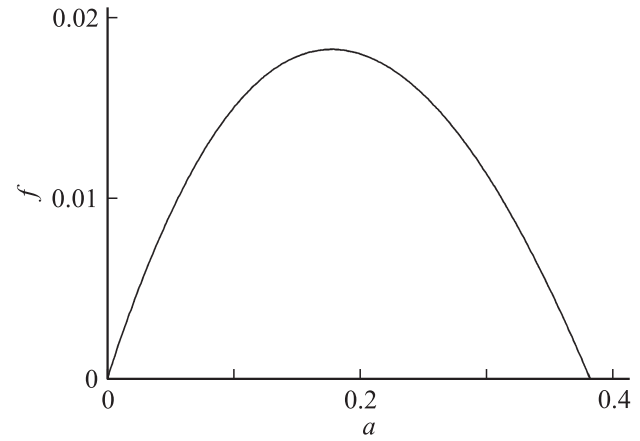


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки аппроксимации от параметра a при $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$.

диапазоне значений параметров задачи. Пусть $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$. Значение коэффициента a может меняться в пределах $0 \leq a \leq (4\gamma_c - 1)^{-1} \approx 0.382$. При $a > (4\gamma_c - 1)^{-1}$ решения не имеют физического смысла: соответствующие им поверхности становятся самопересекающимися. Зависимость ошибки аппроксимации от параметра a для указанного интервала его значений приведена на рис. 3. Видно, что на краях интервала ошибка обращается в нуль (решение становится точным), а ее максимальное значение приблизительно равно 0.018, т.е. оказывается весьма малым. Это подтверждает наше предположение о том, что учет высоких гармоник не вносит существенных поправок к приближенному решению (34) и (36)–(38), а основанная на этом решении модель адекватно описывает возможные равновесные конфигурации капли.

Параметрические выражения, задающие геометрию равновесной поверхности, получим из соотношения (35), отделив вещественную часть от мнимой:

$$x = X(\tau) = \lambda \cos \tau - \frac{2\lambda a \cos(2\gamma - 1)\tau}{2\gamma - 1} - \frac{\lambda a^2 \cos(4\gamma - 1)\tau}{4\gamma - 1},$$

$$y = Y(\tau) = \lambda \sin \tau + \frac{2\lambda a \sin(2\gamma - 1)\tau}{2\gamma - 1} + \frac{\lambda a^2 \sin(4\gamma - 1)\tau}{4\gamma - 1}.$$

Параметр τ здесь изменяется в диапазоне $0 \leq \tau \leq \pi/\gamma$. Как уже указывалось, эти приближенные решения превращаются в точные в двух случаях: когда $a = 0$, что соответствует отсутствию внешнего электрического поля ($A = 0$), и когда $a = (4\gamma - 1)^{-1}$, что соответствует полученным выше решениям для равной нулю разности давлений p .

На рис. 4, 5 приведены семейства равновесных конфигураций поверхности жидкости для углов раствора больших и меньших π .

Отметим, что важным достоинством полученных приближенных решений для равновесных конфигураций капли является их относительная простота, которая позволит нам в следующем разделе исследовать их

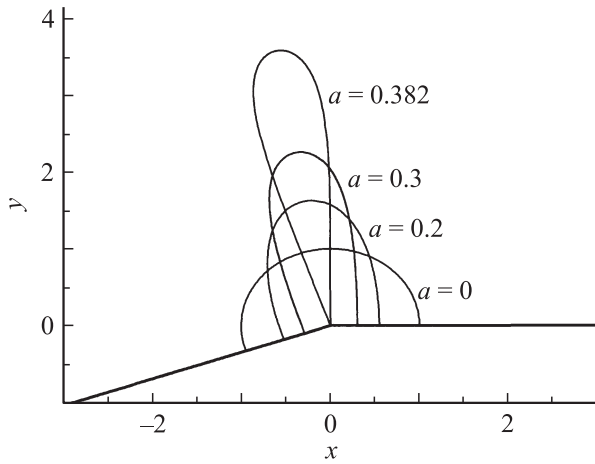


Рис. 4. Профили поверхности капли для $\gamma \approx 0.905$ при значениях параметра $a = 0, 0.2, 0.3, 0.382$.

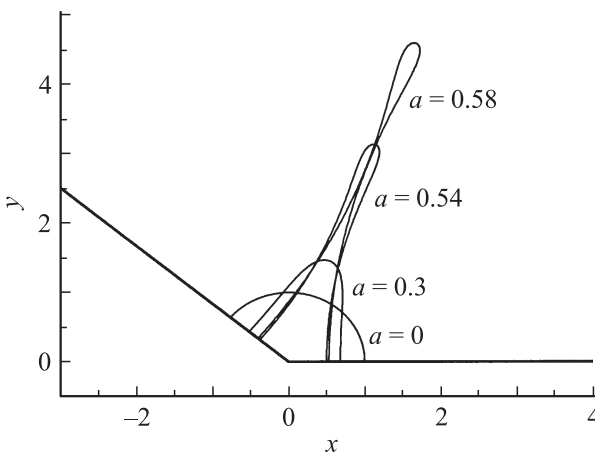


Рис. 5. Профили поверхности капли для $\gamma \approx 1.285$ при значениях параметра $a = 0, 0.3, 0.54, 0.58$.

(в частности, на устойчивость) аналитическими методами.

Анализ приближенных решений

В предыдущем разделе получено двухпараметрическое семейство приближенных решений (35)–(38) для равновесных конфигураций поверхности двумерной капли проводящей жидкости, деформируемой электростатическими силами.

При $a = 0$ поперечное сечение жидкости представляет собой сегмент круга единичного радиуса. При увеличении значения коэффициента a поверхность капли деформируется, вытягиваясь в направлении внешнего электрического поля. Для заданного угла раствора можно указать критическое значение a_c параметра a , при котором поверхность капли становится самопересекающейся. При $a > a_c$ решения лишены физического смысла.

В зависимости от значения параметра γ можно выделить два различных сценария. Для $1/2 \leq \gamma \leq 1$, т.е. для углов раствора $\pi \leq \Theta \leq 2\pi$, точка самопересечения возникает в вершине клина. Как следствие, капля целиком отрывается от поверхности (см. рис. 4). Критическое значение параметра a несложно найти аналогично тому, как это делалось выше для точных решений, т.е. из условия $Z(0) = 0$. Оно определяется выражением:

$$a_c(\gamma) = \frac{1 - 4\gamma + 2\gamma\sqrt{4\gamma - 1}}{2\gamma - 1}. \quad (39)$$

Для $\gamma > 1$, т.е. для $0 < \Theta < \pi$, точка самопересечения поверхности возникает не в начале координат. Как следствие, занимаемая жидкостью область перестает быть односвязной — часть жидкости остается на электроде, а часть отделяется (см. рис. 5). Отметим, аналогичные результаты дает численное решение родственной задачи о геометрии пузырей, деформируемых угловым течением жидкости [18].

Оценим относительную ошибку f аппроксимации при $1/2 \leq \gamma \leq 1$ для наибольших возможных деформаций поверхности, т.е. для $a = a_c(\gamma)$. Оценка точности решений в этой области представляет значительный интерес, поскольку в большей части интервала, а именно при $1/2 \leq \gamma < \gamma_c$, наши приближенные решения фактически являются интерполяцией между тривиальным точным решением задачи, соответствующим $a = 0$, и не имеющим физического смысла нетривиальным решением, для которого $a = (4\gamma - 1)^{-1} > a_c(\gamma)$. Соответствующая зависимость функции f от γ представлена на рис. 6. Из него видно, что ошибка обращается в нуль при $\gamma = 1/2$ и при $\gamma = \gamma_c$, а в промежутке она достигает равного 0.029 максимального значения. Таким образом, ошибка аппроксимации оказывается достаточно малой, и вполне можно пользоваться на этом интервале аналитическими решениями (35)–(38). При $\gamma > \gamma_c$ (в этой области полученное решение является экстраполяционным) ошибка f монотонно нарастает, достигая относительно малого значения в 0.027 при $\gamma = 1$. Последнее дает

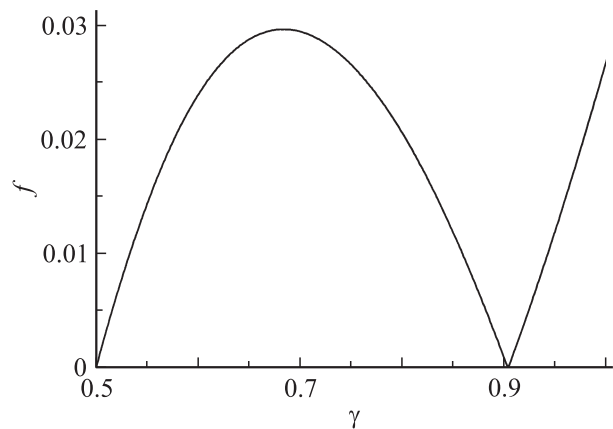


Рис. 6. Зависимость относительной ошибки аппроксимации от γ при $a = a_c$.

дополнительное основание для использования приближенных решений для конфигураций струй в поперечном электрическом поле, полученных нами ранее в работе [12].

Проведем теперь качественный анализ устойчивости решений по отношению к возмущениям, не нарушающим плоской симметрии задачи. Напомним, что внешним управляющим параметром является величина A , характеризующая приложенную к капле разность потенциалов ($A \sim U^2$). В результате воздействия электростатических сил поверхность проводящей жидкости деформируется, что приводит к увеличению площади свободной поверхности и, следовательно, длины границы жидкости в ее поперечном сечении. Длина границы задается выражением

$$L = \int_0^{\pi/\gamma} G\bar{G}d\tau = \frac{\pi\lambda}{\gamma} (1 + a^2). \quad (40)$$

Эту величину естественно использовать в качестве характеристики степени деформации капли. Выражения (37), (38), (40) в сочетании с (36) задают величины p , A и L как функции a и γ . При фиксированном γ они в параметрической форме (роль параметра играет коэффициент a) определяют взаимосвязь между этими ключевыми величинами. Характерные зависимости длины L и разности давлений p от внешнего управляющего параметра A приведены на рис. 7 и 8. Из них видно, что задача не имеет решений, если значение A превышает некоторое критическое $A_m(\gamma)$. Отсутствие равновесных решений при $A > A_m$ означает, что баланс поверхностных и электростатических сил невозможен, и капля либо распадется, либо оторвется от поверхности электрода. При $A = A_m$ решение задачи единственно. Будем считать, что оно соответствует равному $a_s(\gamma)$ значению параметра a . При $A < A_m$ задача может допускать два решения, соответствующих различным значениям a . На одной ветви ($0 \leq a < a_s$) деформация капли, характеризуемая длиной L , увеличивается, а на другой ветви ($a_s < a \leq a_c$) — уменьшается с увеличением значения управляющего параметра A . Это свидетельствует о том, что первая ветвь устойчива, а вторая — не устойчива по отношению к малым деформациям поверхности жидкости (растяжению либо сжатию капли вдоль направления внешнего электрического поля).

Действительно, если в области $a > a_s$ деформируем равновесную поверхность капли, к примеру, увеличив L , то условие баланса сил сможет выполняться только если внешнее поле и, следовательно, значение параметра A будет несколько уменьшено. При прежнем значении поля капиллярные силы не будут способны компенсировать дестабилизирующее влияние электростатических сил. Это приведет к дальнейшей деформации капли, т.е. к развитию неустойчивости. Аналогичные рассуждения свидетельствуют в пользу устойчивости решений при $a < a_s$.

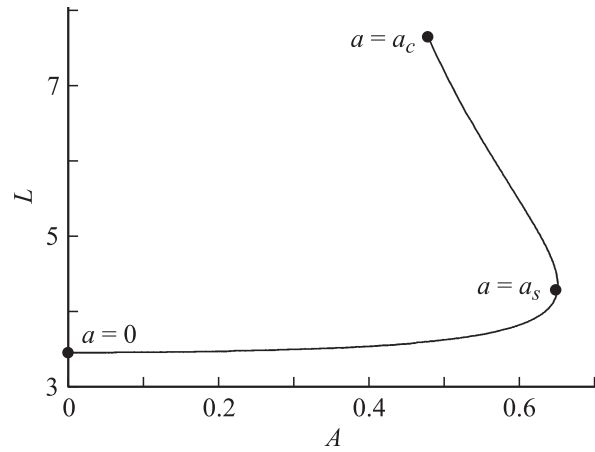


Рис. 7. Зависимость длины L от внешнего управляющего параметра A при $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$.

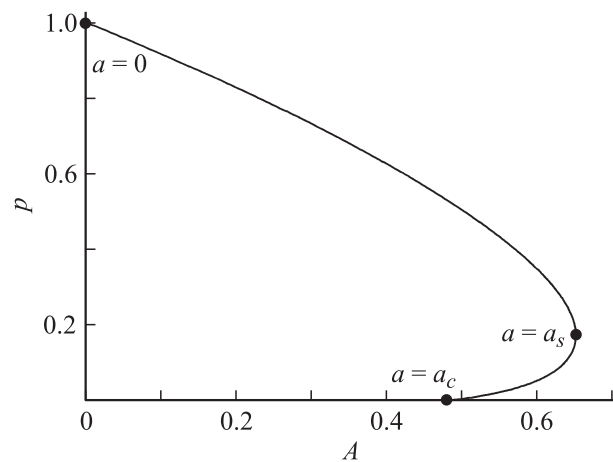


Рис. 8. Зависимость разности давлений p внутри и снаружи капли от параметра A при $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$.

На рис. 7 и 8 $\gamma = \gamma_c \approx 0.905$. Для этого случая $A_m \approx 0.653$, что соответствует $a = a_s \approx 0.24$. При превышении этого значения внешнего управляющего параметра A стационарных решений для капли не существует. Нетривиальное точное решение, для которого $a_0 = a_c \approx 0.382$ (см. рис. 2), неустойчиво. Для $\gamma = \gamma_s \approx 1.285$ точное решение (см. рис. 1) находится в экстремуме — на границе областей устойчивых и неустойчивых решений ($a_0 = a_s$). Для $\gamma = 1$ нетривиальное точное решение (оно соответствует $a = 1/3$) находится в области неустойчивых решений; этот факт был установлен нами в работах [11,12]. Из общих соображений ясно, что устойчивой всегда является ветвь, которая включает реализующееся при $A = 0$ тривиальное решение.

Отметим, что при $1/2 < \gamma < 0.723$ задача допускает лишь одну (устойчивую) ветвь решений (a_s становится больше a_c); этот случай подробно рассмотрим на примере, когда $\gamma \approx 1/2$. Несложно заметить, что для $\gamma = 1/2$, что соответствует $\Theta = 2\pi$, в решении (35) возникает неопределенность — знаменатель у второго слагаемого

обращается в нуль. Раскрыть возникающую неопределенность можно, осуществив предельный переход $\gamma \rightarrow 1/2$.

Как было показано, решения имеют физический смысл только при $0 \leq a \leq a_c$, где верхняя граница интервала соответствуют формированию точки самопересечения в начале координат, т.е. отрыву капли от электрода. Зависимость $a_c(\gamma)$ задается выражением (39). Представим параметр γ в виде: $\gamma = 1/2 + \varepsilon$, где ε — малая величина. Получим из (39):

$$a_c \approx \varepsilon - \varepsilon^3 = \varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

т.е. $a_c \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Удобно ввести вспомогательный параметр $q \equiv a/a_c(\varepsilon)$. При фиксированном ε решения задачи соответствуют интервалу $0 \leq q \leq 1$. Равновесная форма поверхности капли будет задаваться выражениями:

$$\begin{aligned} x &= X(\tau) = (1 + q\varepsilon)(\cos \tau - q) + O(\varepsilon^2), \\ y &= Y(\tau) = (1 + q\varepsilon) \sin \tau + 2q\varepsilon\tau + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

где $0 \leq \tau \leq 2\pi(1 - 2\varepsilon)$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что граница капли представляет собой окружность единичного радиуса с центром в точке $x = -q$ и $y = 0$. При изменении параметра q капля, сохраняя форму, будет перемещаться по электроду (для $\Theta = 2\pi$ электрод представляет собой лезвие) и оторвется при $q = 1$.

Перепишем в терминах q и ε формулы (37), (38) и (40). Учитывая члены первого порядка малости в разложении по ε , получим:

$$\begin{aligned} p &= 1 - q(4 + q)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ A &= 16q\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ L &= 2\pi + 2\pi(q^2 - 2)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Эти соотношения дают связь между величинами p , L и A в параметрическом виде, причем роль параметра играет q . Из них видно, что для фиксированного ε при увеличении значения параметра A , характеризующего электростатическое давление, длина L будет монотонно расти (разность давлений p при этом — монотонно убывать). Это означает, что имеет место устойчивая ветвь решений. Неустойчивой ветви при $\gamma \approx 1/2$ не существует. Ясно также, что чем меньше ε , тем меньше требуется воздействие на каплю для ее отрыва. Так, при $\varepsilon = 0$ будет $A = 0$, т.е. в этом пределе капля отрывается и без влияния электростатических сил.

Отметим, что, поскольку для $\gamma \approx 1/2$ равновесные поверхности всегда близки к окружности, то имеется возможность построения соответствующих решений в рамках теории возмущений по малому параметру — амплитуде деформации поверхности. Эти решения получены в рамках непертурбативного подхода в пределе $\gamma \rightarrow 1/2$.

Примечательно, что в области $1/2 < \gamma < 0.723$, где имеется лишь одна ветвь решений, при увеличении напряженности внешнего электрического поля поверхность остается устойчивой вплоть до момента отрыва

капли. Наибольшее значение $A_m(\gamma)$ параметра A , при котором решение имеет физический смысл, соответствует $a = a_c(\gamma)$. Напротив, при $\gamma > 0.723$ решение с точкой самопересечения относится ко второй (неустойчивой) ветви решений и не может быть реализовано на практике. Устойчивое решение с наибольшей возможной деформацией не имеет особенностей. Оно реализуется при экстремальном значении $A_m(\gamma)$ внешнего управляющего параметра, соответствующего $a = a_s(\gamma)$. При $A > A_m$ стационарных решений для формы поверхности капли не существует. В этом случае для описания поведения капли, в частности процесса формирования точек самопересечения, требуется рассмотрение уравнений движения жидкости, что выходит за рамки данной работы.

Заключение

В настоящей работе найдено однопараметрическое семейство точных решений задачи о равновесной конфигурации свободной поверхности проводящей жидкости, деформированной внешним неоднородным электрическим полем. Двумерная капля жидкости (для полученных решений поверхность жидкости обладает плоской симметрией) находится на вершине клиновидного края проводника; параметром решений является угол раствора между составляющими клин полуплоскостями.

Точные решения соответствуют частному случаю, когда разность давлений внутри и вне жидкости равна нулю ($P = 0$) и записанное в конформных переменных условие баланса давлений существенно упрощается. Для произвольных значений P построены приближенные решения для геометрии капли и продемонстрировано, что погрешность аппроксимации относительно мала. С помощью этих решений проведен анализ условий распада капли. Так, в частности, можно определить пороговое значение (U_m) приложенной разности потенциалов U , при превышении которого капля не может удерживаться на электроде:

$$U_m = \sqrt{TR_0 A_m / \varepsilon_0}.$$

Для $0 < \Theta < 249^\circ$ пороговое значение A_m параметра A определяется из выражений (37), (38) и (40) как экстремум в зависимостях L от A , либо p от A (см. рис. 7 и 8). При $A > A_m$ стационарных решений задачи не существует. Для $249 \leq \Theta \leq 360^\circ$ пороговое значение параметра A соответствует ситуации, когда в решении возникает точка самопересечения. Оно определяется из выражений (38) и (39). Отметим, что в указанном интервале углов раствора условие баланса давлений допускает решения и при $A > A_m$ однако эти решения являются самопересекающимися и не имеют физического смысла.

Как уже указывалось, рассмотренная нами электростатическая задача с математической точки зрения аналогична задаче о потенциальном обтекании двумерного пузыря несжимаемой жидкостью. Действительно, сравнив условие баланса давлений на поверхности проводя-

шей жидкости (2) с уравнением Бернулли (см., например, [18]), обнаруживаем, что они совпадают с точностью до замен

$$\Phi\sqrt{\varepsilon_0} \rightarrow \Psi\sqrt{\rho}, \quad k \rightarrow -k,$$

где Ψ — функция тока, а ρ — плотность жидкости. Основное различие между этими задачами связано с условием, что при деформации капли площадь ее поперечного сечения s сохраняется (аналогичного условия для деформированного пузыря нет). Именно это условие позволяет связать параметры A и L , характеризующие величину приложенного электрического поля и соответственно степень деформации капли, и в итоге сделать некоторые выводы об устойчивости полученных решений. Так, например, оказывается, что построенные выше точные решения могут быть устойчивы только при $\Theta < 140^\circ$.

Следует отметить, что полученные в работе точные частные решения могут использоваться для тестирования численных методов расчета конфигураций проводящей жидкости в электрическом поле, а также геометрии обтекаемых жидкостью пузырей. В частности, наши результаты хорошо согласуются с расчетами работ [16–18].

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ–Урал (проект № 10-08-96016), Совета по грантам при Президенте РФ (проект МД-4049.2010.2) и Фонда „Династия“ в рамках Программы поддержки фундаментальных проектов, выполняемых совместно УрО РАН и СО РАН, и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

Список литературы

- [1] *Taylor G.I.* // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1964. Vol. 280. P. 383.
- [2] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. С. 1990.
- [3] *Zubarev N.M. and Zubareva O.V.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 016 307.
- [4] *McLeod E.B.* // J. Rat. Mech. Anal. 1955. Vol. 4. P. 557.
- [5] *Crapper G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. Vol. 2. P. 532.
- [6] *Kinnersley W.* // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 77. P. 229.
- [7] *Growdy D.* // J. Nonlinear Sci. 1999. Vol. 9. P. 615.
- [8] *Crowdy D.* // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 2836.
- [9] *Wegmann R. and Crowdy D.* // Nonlinearity. 2000. Vol. 13. P. 2131.
- [10] *Growdy D.* // Eur. J. Appl. Math. 2001. Vol. 12. P. 689.
- [11] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 20. С. 14.
- [12] *Zubarev N.M. and Zubareva O.V.* // Physica A. 2007. Vol. 385. P. 35.
- [13] *Zubarev N.M.* // Physica D. 2001. Vol. 152–153. P. 787.
- [14] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 21. С. 39.
- [15] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [16] *Vanden-Broeck J.M. and Keller J.B.* // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 101. P. 673.

- [17] *Vanden-Broeck J.-M. and Keller J.B.* // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. P. 1491.
- [18] *Ozugurli E. and Vanden-Broeck J.M.* // Eur. J. Appl. Math. 2000. Vol. 11. P. 171.
- [19] *Zubarev N.M. and Zubareva O.V.* // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19. P. 102 110.
- [20] *Shankar P.N.* // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 244. P. 187.