

01;04

Действие рэлеевского механизма локального повышения энергии при движении ударной волны в активной среде

© В.В. Кучинский, И.И. Оносов

Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем,
196066 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: AJAX@COMSET.NET

(Поступило в Редакцию 8 февраля 2010 г. В окончательной редакции 17 мая 2010 г.)

Рассматривается механизм воздействия ударной волны на активную среду, приводящий к появлению дополнительного источника энерговыделения. Этот источник движется вместе с фронтом ударной волны и зависит (в плазме) от величины и направления приложенного электрического поля и плотности тока. Ранее был рассмотрен случай движения слабых ударных волн, данная работа является ее продолжением. Рассматриваются ударные волны любой интенсивности и любой механизм возникновения дополнительного энерговыделения за счет изменений параметров среды при прохождении ударной волны. Частными случаями являются движение ударной волны в плазме и детонационное горение.

Введение

Прохождение ударной волны (УВ) в активных средах вызывает интерес в связи с возможностью использования особенностей этого явления для плазменного управления аэродинамическими характеристиками гиперзвуковых летательных аппаратов и в связи с рассмотрением детонационных процессов. Предлагаемый ниже подход позволяет получить структуру УВ за ударным фронтом. В этом плане работа является продолжением работ Зельдовича, фон Неймана и Деринга.

Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается одномерная плоская УВ, движущаяся в потоке газа, причем в окрестности ударного фронта в результате специфических свойств УВ возникает источник тепла, который движется вместе с фронтом ударной волны. Система нестационарных уравнений, описывающая параметры ударной волны при наличии движущегося в направлении оси x со скоростью w источника тепла, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + P - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right)\rho u + \left(P - \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right)u - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right\} - Q(x - wt) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ , u , e — соответственно плотность, массовая скорость и внутренняя энергия газа, μ — вязкость газа, P — статическое давление, λ — коэффициент

теплопроводности, T — абсолютная температура газа, Q — поступающая в единицу объема мощность.

Рассматривается решение системы (1), стационарное в системе координат $\xi = x - wt$, движущейся со скоростью w . В качестве искомой функции взята скорость $v = w - u$, что, очевидно, соответствует выбору систему координат, движущейся вместе с источником. Используем полученное в работе [1] уравнение для энтальпии газа $H(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\left[H(\xi) + \frac{v^2}{2} - \frac{E_0}{\rho_1 v_1}\right] + b\left[H(\xi) + \frac{v^2}{2} - \frac{E_0}{\rho_1 v_1}\right] \\ = \frac{3}{4\mu} \int_{\xi}^{\infty} Q(\xi') d\xi', \end{aligned} \quad (2)$$

где $E_0/(\rho_1 v_1)$ имеет смысл энтальпии газа на плюс бесконечности (в невозмущенной области; соответствующие параметры отмечаются индексом „1“), $b = = 3\rho_1 v_1/(4\mu)$. Решение этого уравнения для функции

$$H(\xi) + \frac{v^2}{2} - \frac{E_0}{\rho_1 v_1},$$

стремящееся к нулю на $+\infty$, имеет вид

$$H(\xi) + \frac{v^2}{2} - \frac{E_0}{\rho_1 v_1} = \frac{\Delta E(\xi)}{\rho_1 v_1}, \quad (3)$$

где

$$\Delta E(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} Q(\xi') d\xi' + e^{-b\xi} \int_{-\infty}^{\xi} Q(\xi') e^{b\xi'} d\xi'. \quad (4)$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе [1], рассмотрим точку ξ_0 , в которой

$$\left.\frac{dv}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_0} = 0.$$

В качестве такой точки можно взять положение минимума функции $v(\xi)$ [1]. Значение $v(\xi_0)$ обозначим $v_2 = v(\xi_0)$. Для $\bar{v}(\xi) = v(\xi)/v_1$ получается уравнение

$$\alpha \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dz} = (1 - \bar{v})(\bar{v} - 1 - \delta) - \frac{\alpha^2}{4} B(z), \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{2(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)}, \quad \delta = 1 - \bar{v}_2 - \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma - 1)(1 - \bar{v}_2)} \frac{\Delta E(\xi_0)}{\rho_1 v_1^3},$$

$$z = M\alpha \frac{3\rho_1 a_1 (\gamma + 1)}{8\mu\gamma} \xi, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}; \quad (6)$$

$$B(\xi) = \frac{\Delta E(\xi)}{E_{cr}},$$

$$B(z) = \beta \left[\int_z^\infty \omega(z') dz' + e^{-az} \int_{-\infty}^z \omega(z') e^{az'} dz' \right]; \quad (7)$$

$$\beta = \frac{8\mu}{3} \frac{\gamma(\gamma^2 - 1)M^2}{\rho_1^2 a_1^4 (M^2 - 1)^3} Q_0, \quad a = \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1},$$

$$E_{cr} = \frac{(M^2 - 1)^2 \rho_1 a_1^3}{2M(\gamma^2 - 1)}, \quad (8)$$

где M — число Маха. Из энерговклада $Q(z)$ выделен размерный постоянный коэффициент Q_0

$$Q(z) = Q_0 \omega(z) \quad (9)$$

и зависящая от координаты безразмерная функция тепловыделения $\omega(z)$.

В уравнениях (5), (6) параметр δ можно определить, устремляя к нулю величину энерговклада, что приведет наши результаты в соответствие с данными работ [1] и [2], получим

$$\delta = \alpha. \quad (10)$$

В дальнейшем удобно использовать в качестве иско-мой функции величину

$$p(z) = \frac{1 - \bar{v}(z)}{\alpha},$$

которая удовлетворяет уравнению

$$(1 - \alpha p) \frac{dp}{dz} = p(p - 1) + \frac{1}{4} \beta \left[\int_z^\infty \omega(z') dz' + J(z) \right], \quad (11)$$

$$J(z) = e^{-az} \int_{-\infty}^z \omega(z') e^{az'} dz', \quad (12)$$

где

$$\alpha a = \frac{7}{6} \quad (13)$$

при $\gamma = 1.4$.

Из уравнения (11) можно получить величину $J(z)$:

$$J(z) = \frac{4}{\beta} \left[(1 - \alpha p) \frac{dp}{dz} - p(p - 1) \right] - \int_z^\infty \omega(z') dz' \quad (14)$$

и подставить ее в результат дифференцирования уравне-ния (11), что дает для $p(z)$ уравнение

$$(1 - \alpha p) \frac{d^2 p}{dz^2} = [2p - 1 - a(1 - \alpha p)] \frac{dp}{dz} + \alpha \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 + ap(p - 1) + a \frac{\beta}{4} \int_z^\infty \omega(z') dz'. \quad (15)$$

Если взять в качестве переменной величину

$$V = \int_z^\infty \omega(z') dz', \quad (16)$$

то уравнение (15) приходит к виду

$$\frac{1}{a} \omega(V) \frac{dF(V)}{dV} - F(V) + \frac{\beta V}{4} = 0, \quad (17)$$

где

$$F(V) = -(1 - \alpha p) \omega(V) \frac{dp}{dV} - p^2 + p \quad (18)$$

или

$$F(z) = (1 - \alpha p) \frac{dp}{dz} - p^2 + p. \quad (19)$$

Еще одно дифференцирование уравнения (15) дает урав-нение третьего порядка для функции $p(z)$:

$$e^{-az} \frac{d}{dz} \left(e^{az} \frac{dF(z)}{dz} \right) + a \frac{\beta}{4} \omega(z) = 0, \quad (20)$$

которое можно записать как

$$\frac{1}{a} \frac{dF(z)}{dz} + F(z) - \frac{\beta}{4} \int_z^\infty \omega(z') dz' = 0 \quad (21)$$

или

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{dF(z)}{dz} + \frac{\beta}{4} \omega(z) = 0. \quad (22)$$

Выражение (18) вместе с (17) и (19) вместе с (22) составляют систему из двух уравнений относительно неизвестных функций F и p . Соответствующие систе-мы уравнений для относительной скорости $\bar{v} = 1 - \alpha p$ имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dp}{dV} (1 - \alpha p) \omega = p - p^2 - F, \\ \frac{\omega}{a} \frac{dF}{dV} = F - \frac{\beta V}{4} \end{cases}$$

соответствует

$$\begin{cases} \alpha \omega \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dV} = (1 - \bar{v} - \alpha)(1 - \bar{v}) + \alpha^2 F, \\ \frac{\omega}{\alpha a} \frac{d(\alpha^2 F)}{dV} = \alpha^2 F - \frac{\alpha^2 \beta V}{4}. \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{dp}{dz}(1 - \alpha p) = p^2 - p + F, \\ \frac{1}{a} \frac{d^2 F}{dz^2} = -\frac{dF}{dz} - \frac{\beta}{4} \omega \end{cases}$$

соответствует

$$\begin{cases} \alpha \bar{v} \frac{d\bar{v}}{dz} = -\alpha F - (1 - \bar{v})(1 - \bar{v} - \alpha), \\ \frac{1}{a} \frac{d^2(\alpha^2 F)}{dz^2} = -\frac{d(\alpha^2 F)}{dz} - \frac{\alpha^2 \beta}{4} \omega. \end{cases} \quad (24)$$

Для численного решения системы уравнений (23) (для неизвестных функций $p(V)$ и $F(V)$) можно использовать метод разложения в ряд. Представим эти функции в виде разложения по параметру

$$\lambda = \frac{1}{a} = \frac{M^2 - 1}{\gamma M^2} \quad \left(0 \leq \lambda < \frac{1}{\gamma}\right), \quad (25)$$

$$p(V) = \sum_{k=0}^N A_k \lambda^k, \quad F(V) = \sum_{k=0}^N B_k \lambda^k, \quad (26)$$

где коэффициенты A_k, B_k есть функции от V :

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dV} &= -\frac{1}{\omega(1 - \alpha A_0)} (A_0^2 - A_0 + B_0), \\ \frac{dA_1}{dV} &= -\frac{1}{\omega(1 - \alpha A_0)} \left[A_1 \left(2A_0 - 1 - \alpha \omega \frac{dA_0}{dV} \right) + B_1 \right], \dots, \\ B_0 &= \frac{\beta V}{4}, \quad B_1 = \frac{\beta}{4} \omega, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Первое из уравнений (27) соответствует $\lambda = 0$ и дает приближение слабых ударных волн [1]. Если выписать все последующие уравнения (27), то можно заметить, что они являются линейными относительно функций A_k , и соответственно их величина пропорциональна функциям B_k . Но функции B_k , как это следует из уравнений (27), вычисляются из предыдущих функций B_{k-n} , которые пропорциональны параметру энерговклада β . Оценки показывают, что для большинства рэлеевских сред характерно значение $\beta \ll 1$. Это означает, что даже при малом числе членов рядов (26) вычисление решений системы уравнений (23) по формулам (27) дает очень хорошую точность.

Для построения $p(z)$ можно использовать полученное решение уравнения $p(V)$, используя очевидное равенство

$$z(V) = \int_V^{V_0} \left[\frac{1}{\omega(V')} \right] dV' \quad \left(\frac{dV}{dz} = -\omega, \quad dz = -\frac{dV}{\omega} \right). \quad (28)$$

Это равенство позволяет построить функции

$$p = \frac{1 - \bar{v}}{\alpha}$$

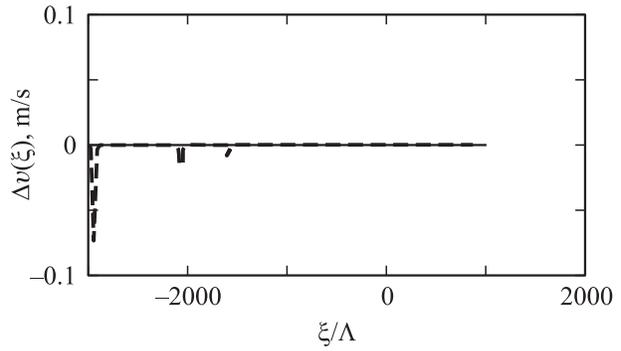


Рис. 1. Разность точного решения уравнения (33) и нулевого приближения (37) для $M = 2.2, \beta = 1.04 \cdot 10^{-4}$.

(или $\bar{v} = 1 - \alpha p$) в виде зависимостей от пространственно-временной координаты

$$z = M\alpha \frac{3\rho_1 a_1 (\gamma + 1)}{8\mu\gamma} \xi.$$

Как обычно [1,2], положение начала координат можно задать равенством

$$\left. \frac{d^2 p}{dz^2} \right|_{z=0} = 0,$$

что эквивалентно уравнению

$$\left. \frac{d\omega(V)}{dV} \right|_{V=V_0} \left. \frac{dp(V)}{dV} \right|_{V=V_0} + \omega(V_0) \left. \frac{d^2 p(V)}{dV^2} \right|_{V=V_0} = 0 \quad (29)$$

или

$$\left. \frac{d}{dV} \left[\omega(V) \frac{dp(V)}{dV} \right] \right|_{V=V_0} = 0. \quad (30)$$

Разложение в ряд по параметру λ можно выполнить и непосредственно для системы уравнений (24), что позволит сразу построить зависимость $p(z)$:

$$p(z) = \sum_{k=0}^N c_k \lambda^k, \quad F(z) = \sum_{k=0}^N b_k \lambda^k. \quad (31)$$

Первые коэффициенты ряда удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dc_0}{dz} &= -\frac{c_0 - c_0^2 - \frac{\beta}{4} \int_z^\infty \omega(z') dz'}{(1 - \alpha c_0)}, \\ \frac{dc_1}{dz} &= \frac{1}{(1 - \alpha c_0)} \left[(2c_0 - 1 + \alpha \frac{dc_0}{dz}) c_1 + \frac{\beta}{4} \omega \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Как показывают результаты численных расчетов, уже второй член ряда (26) или (31) вносит очень малую поправку в нулевое приближение (рис. 1), что подтверждается и подстановкой решения в системы (23), (24) непосредственно в уравнения третьего порядка для функции $p(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 p}{dz^3} &= -\frac{1}{1 - \alpha p} \left\{ \left[a(1 - \alpha p) - 2p + 1 - 3\alpha \frac{dp}{dz} \right] \frac{d^2 p}{dz^2} \right. \\ &\quad \left. - [2 + \alpha a] \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 + a(1 - 2p) \frac{dp}{dz} + \frac{a\beta}{4} \omega(z) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

с граничными условиями

$$p = 0, \quad \frac{dp}{dz} = 0, \quad \frac{d^2p}{dz^2} = 0, \quad z \rightarrow \infty$$

или для $\bar{v}(z) = 1 - \alpha p(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\bar{v}}{dz^3} = & -\frac{3}{\bar{v}} \frac{d\bar{v}}{dz} \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} + \frac{1}{\alpha\bar{v}} [2 - \alpha + \bar{v}(2 + \alpha a)] \frac{d^2\bar{v}}{dz^2} \\ & - \frac{1}{\alpha\bar{v}} (2 + \alpha a) \left(\frac{d\bar{v}}{dz}\right)^2 + \frac{a}{\alpha\bar{v}} (2 - \alpha - 2\bar{v}) + \frac{\alpha a \beta}{4} \omega(z). \end{aligned}$$

Ударные волны (нулевое приближение)

Приближение слабых УВ соответствует нулевому члену разложения в рядах (26) и (31), т.е. условию $\lambda = 0$. В этом случае, как это видно из уравнений (23),

$$F = \frac{\beta V}{4}. \quad (35)$$

Процедура численного решения этой задачи в том случае, когда функция $\omega(V)$ зависит только от V и $p(V)$, состоит в следующем. Решается первое из уравнений (23) с граничным условием

$$p(\varepsilon) = k\varepsilon, \quad k = \frac{1 + \sqrt{1 - \beta}}{2}. \quad (36)$$

Затем по уравнению (29) или (30) определится значение переменной $V = V_0$, соответствующее случаю $z = 0$. После этого определяются граничные условия для решения уравнения второго порядка для $p(z)$, которое получится дифференцированием первого из уравнений (24):

$$(1 - \alpha p) \frac{d^2p}{dz^2} - \alpha \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 + (1 - 2p) \frac{dp}{dz} + \frac{\beta}{4} \omega(z) = 0 \quad (37)$$

при

$$p|_{z=0} = p_0, \quad \left.\frac{dp}{dz}\right|_{z=0} = -\omega \left.\frac{dp(V)}{dV}\right|_{V=V_0} \quad (38)$$

(напомним, что при этом $\left.\frac{d^2p}{dz^2}\right|_{z=0} = 0$). Полученные решения позволяют определить распределение по оси z всех параметров ударной волны:

— температуры

$$\begin{aligned} T(z) = & \frac{P_1}{\rho_1 R_{\text{gas}}} \left\{ (1 - \alpha p(z)) \right. \\ & \left. \times \left(1 + \gamma \alpha M^2 p(z) + \alpha^2 M^2 \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dp(z)}{dz} \right) \right\}, \quad (39) \end{aligned}$$

где P_1 и ρ_1 — давление и плотность в невозмущенной области,

— давления

$$P(z) = P_1 \left[1 + \gamma \alpha M^2 p(z) + \alpha^2 M^2 \frac{\gamma + 1}{2} \frac{dp(z)}{dz} \right], \quad (40)$$

— плотности

$$\rho(z) = \frac{\rho_1}{1 - \alpha p(z)}, \quad (41)$$

— скорости

$$v(z) = v_1 [1 - \alpha p(z)] \quad (42)$$

— и числа Маха

$$M(z) = \frac{1 - \alpha p(z)}{\sqrt{\alpha(\gamma - 1)p(z)(1 - \frac{\alpha}{2} p(z)) + \frac{1}{M^2} + \mathcal{E}}}, \quad (43)$$

где

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \beta \frac{\gamma + 1}{8} \int_z^\infty \frac{p(z')}{1 - \alpha p(z')} dz'.$$

Для того чтобы перейти от полученных выше (в нулевом приближении) результатов к решению полной задачи (т.е. к решениям уравнений (33) и (34)), достаточно вычислить следующее приближение — второй член в разложении в ряд по λ — по формулам (27) и (32). В этих формулах соответственно решения $p(V)$ (или $p(z)$), полученные в нулевом приближении, надо брать в виде

$$A_0(V) = p(V), \quad c_0(z) = p(z). \quad (44)$$

Прохождение ударных волн через плазму

При прохождении ударных волн через плазму функция $\omega(z)$ пропорциональна локальному изменению плотности, вызванному ударной волной [1]:

$$\omega(z) = \frac{\rho - \rho_1}{\alpha \rho_1} = \frac{\rho}{\rho_1} - \frac{1}{\alpha} = \frac{v_1}{v} - \frac{1}{\alpha} = \frac{p(z)}{1 - \alpha p(z)}, \quad (45)$$

а соответствующий размерный множитель Q_0 в формуле (8) для расчета безразмерного параметра энерговклада β равен

$$Q_0 = \alpha \gamma j P \left(\frac{E}{P} \right), \quad (46)$$

где j — плотность тока, E — напряженность поля [1]. Поскольку выражение (45) не содержит зависимости от производных функции $p(V)$, а только от самой функции, то для численного решения задачи в нулевом приближении (т.е. для $\lambda = 0$) полностью можно использовать методы, описанные выше.

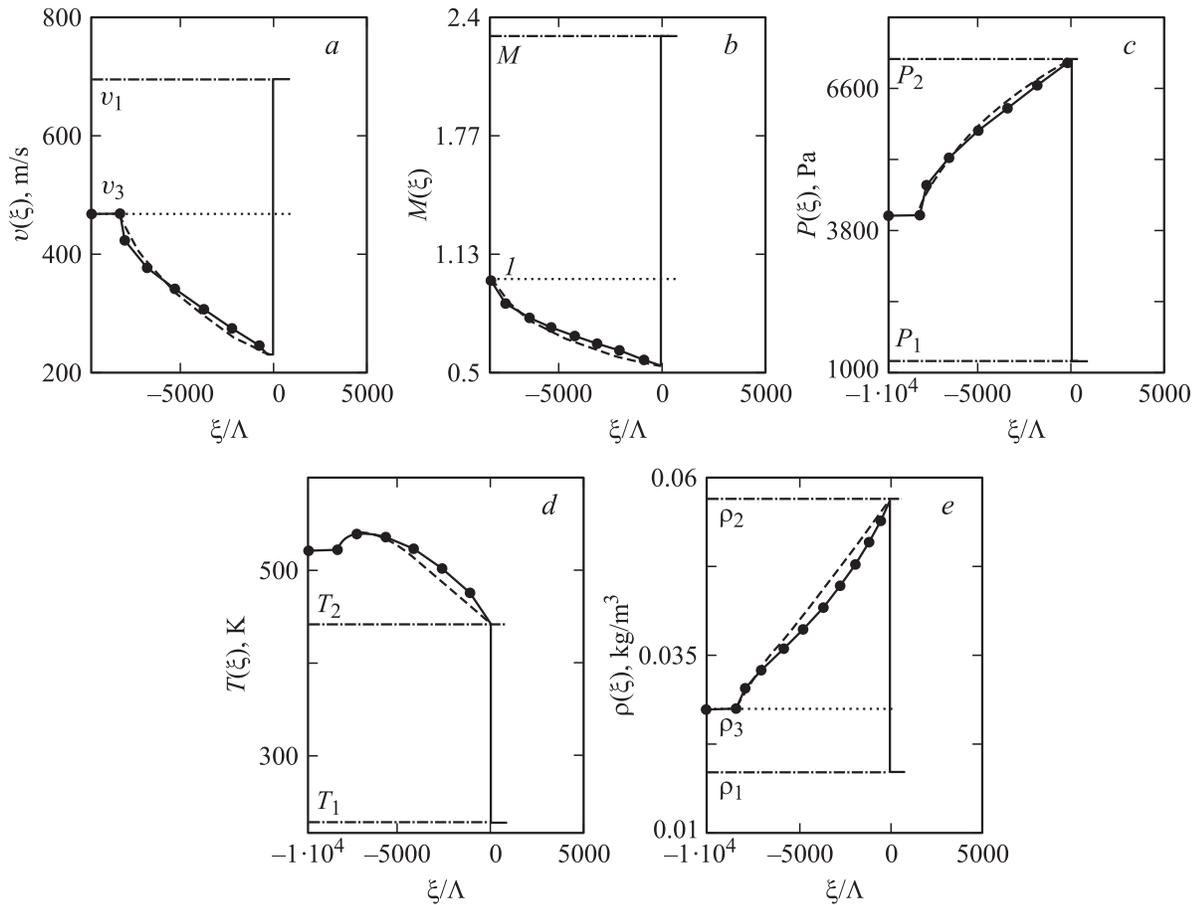


Рис. 2. Зависимость от пространственно-временной координаты, выраженной в числах длин свободного пробега ξ/Λ . Сопоставление результатов численных расчетов (сплошные кривые) и результатов расчета по приближенным формулам (51)–(55) (точки), а также по приближенным формулам (57)–(61) (пунктир): *a* — скорости $v = \bar{v}v_1$; *b* — числа Маха (штрихпунктир — значение M на $+\infty$, точечная линия — значение $M = 1$); *c* — давления (штрихпунктир P_1 — начальное значение давления на $+\infty$); *d* — температуры (штрихпунктир T_1 — начальное значение температуры на $+\infty$); *e* — плотности (штрихпунктир ρ_1 — начальное значение плотности на $+\infty$). Параметры расчета: $M = 2.3$, $Q_0 = 40 \text{ W/cm}^3$, $\Lambda = 5.21 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Коэффициенты разложения зависимости $p(V) = \frac{1-\bar{v}}{\alpha}$, $\bar{v} = \frac{v}{v_1}$ в ряд (26) имеют в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dV} &= -\frac{1}{A_0} (A_0^2 - A_0 + B_0), \\ \frac{dA_1}{dV} &= -\frac{1}{A_0} \left[A_1 \left(2A_0 - 1 + \frac{dA_0}{dV} \right) + B_1 \right], \\ \frac{dA_k}{dV} &= -\frac{1}{A_0} \left[A_k \left(2A_0 - 1 + \frac{dA_0}{dV} \right) + B_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{k-1} A_n \left(A_{k-n} + \frac{dA_{k-n}}{dV} \right) \right], \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (47)$$

$$B_0 = \frac{\beta V}{4},$$

$$B_1 = \frac{\beta A_0}{4(1 - \alpha A_0)},$$

$$B_k = \frac{1}{1 - \alpha A_0} \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{dB_{k-n}}{dV} A_{n-1} + \alpha A_{k-n} B_n \right).$$

Эти формулы позволяют вычислить решение полного уравнения (17) или системы (23) с любой степенью точности.

Алгоритм численного решения может быть следующим. Сначала решаются первые два из уравнений (47) с граничными условиями

$$A_1(\varepsilon) = \frac{\beta}{4} \frac{k}{(1-2k)} \varepsilon, \quad A_0(\varepsilon) = k\varepsilon,$$

где малое число $\varepsilon \ll 1$. По этому решению определяется значение функции $p(V)$ в точке максимума V_{\max} , затем (уже для переменной z) решается уравнение (37) с граничными условиями

$$p(z_{\max}) = p_{\max}(V_{\max}), \quad \left. \frac{dp}{dz} \right|_{z=z_{\max}} = 0 \quad (48)$$

при функции $\omega(z)$, взятой по формуле (45). Полученные зависимости можно использовать как нулевое приближение для вычисления последующих членов в

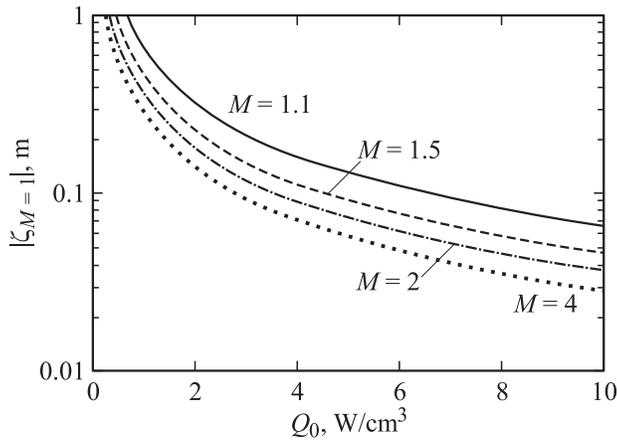


Рис. 3. Зависимости точки повторного выхода числа Маха на значение $M(\xi_{M=1}) = 1$ от величины энерговклада при разных числах Маха (цифры около кривых).

уравнениях (47), однако при практических расчетах вносимые поправки составляют порядка нескольких процентов от нулевого приближения (рис. 1). Построить зависимость $p(z)$ можно и сразу по решению первого из уравнений (47), используя величину V как параметр и формулу (28) для перехода к координате z . В этом случае она имеет вид

$$z(V) = \int_V^{V_0} \left[\frac{1}{p(V')} - \alpha \right] dV'. \quad (49)$$

После этого найденное решение корректируется — уточняется положение точки $z = 0$. В этой точке решение должно иметь нулевую вторую производную. Следует отметить, что требование $\frac{d^2 p}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0$ в приближении слабых ударных волн приводит к уравнению

$$\frac{dp}{dV} \Big|_{V=V_0} - \frac{2p-1 + \sqrt{(2p-1)^2 + \frac{\alpha\beta p}{1-\alpha p}}}{2\alpha p} (1-\alpha p) \Big|_{V=V_0} = 0, \quad (50)$$

которое для прохождения слабых ударных волн через плазму эквивалентно общему условию (29), (30). Корректировка положения точки $z = 0$ полезна для сравнения результатов расчетов при различных значениях входных параметров.

Результаты проведенных расчетов (рис. 2 и 3) позволяют сделать следующие выводы.

1. Увеличение числа Маха

- приближает к началу координат точку повторного выхода числа Маха на значение $M = 1$;
- увеличивает максимальную разницу температур ΔT_{\max} (рис. 2);
- уменьшает ширину ударного фронта;
- уменьшает безразмерный энергетический параметр β (формула (8)).

2. Увеличение величины энерговклада Q_0

- приближает к началу координат точку повторного выхода числа Маха на значение $M = 1$ (т.е. уменьшает область существования стационарного решения задачи);
- практически не изменяет максимальную разницу температур;
- практически не изменяет ширину ударного фронта;
- увеличивает безразмерный энергетический параметр β .

Приближенные методы расчета в случае прохождения ударных волн через плазму

Как было показано выше, для построения решения $p(z)$ в нулевом приближении (а оно практически всегда совпадает с решением полного уравнения) можно использовать формулу (47) и величину V в качестве параметра. Приближенные расчеты можно начинать с определения точки $V_c \neq 0$ такой, что $p(V_c) = 0$. Поскольку первое уравнение (45) (расчеты ведутся в нулевом приближении, т.е. $p(V) = A_0(V)$) в качестве параметра содержит только величину β , то $V_c = f(\beta)$ (рис. 4). Для получения V_c можно использовать рис. 4 или приближенные формулы

$$V_c \approx \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left[1 + 32.259(1 - e^{-0.0477\beta}) \frac{1}{\beta^{0.378}} \right], & \beta \leq 0.23507, \\ \frac{1}{\beta} \left[0.045 + 3.2027(1 - e^{-0.8062\beta}) \frac{1}{\beta^{0.7238}} \right], & \beta > 0.23507. \end{cases} \quad (51)$$

При очень малых значениях параметра энерговклада $0 < \beta \leq 0.002$ для расчета $p(V)$ в области $0 \leq V \leq 0.99/\beta$ можно использовать простую прибли-

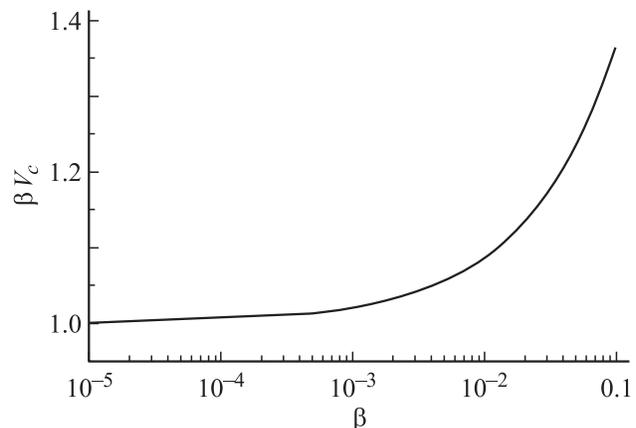


Рис. 4. Зависимость произведения параметра β на значение V_c , при котором $p(V_c) = 0$, от величины β .

Таблица 1.

β	0.002	0.005	0.0075	0.01	0.02	0.025	0.05	0.075	0.10	0.15	0.2	0.25	0.30
q	0.429	0.427	0.425	0.422	0.417	0.416	0.415	0.4155	0.418	0.4225	0.418	0.410	0.402

Таблица 2.

k	0	1	2	3	4	5
Q_k	0.430 363	-0.876 287	14.946 353	-97.681 037	272.480 896	-279.993 323

женную формулу, в основе которой лежит решение уравнения (47) при $\beta = 0$:

$$p(V) \approx \begin{cases} [1 - e^{-V}], & V < V_0, \\ \frac{1}{2} [1 - e^{-V} + \sqrt{(1 - e^{-V})^2 - \beta V}], & V \geq V_0, \end{cases} \quad (52)$$

где величина V_0 определяется из уравнения (50) по второй из формул (52). Для продолжения формулы до величины V_c можно взять последнюю точку $V = 0.99/\beta$ по формуле (52), значение $p(V_c) = 0$ и проаппроксимировать $p(V)$ на последнем участке. При этом следует помнить, что решение рассматриваемой стационарной задачи существует только при $V \leq V_{M=1}$, где $V_{M=1}$ — точка повторного выхода числа Маха на значение $M(V_{M=1}) = 1$. Как это видно из расчетов, величина $V_{M=1} < V_c$, так что точность аппроксимации на участке $V_{M=1} < V \leq V_c$ существенной роли не играет. Таким образом, определено приближенное значение $p(V)$, после чего с помощью формул (52) и (49) можно построить величину $p(z)$ параметрическим методом.

При значениях $0.002 \leq \beta \leq 0.3$ можно использовать приближенное решение для функции $p(V)$ через функции Эйри $Ai(x)$, $Bi(x)$:

$$p(V) \approx \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt[3]{2\beta q} \frac{\frac{d}{dx} Ai(x) + c \frac{d}{dx} Bi(x)}{Ai(x) + c Bi(x)} \right],$$

$$x = \left(\frac{1}{\beta} - V \right) \sqrt[3]{\frac{\beta}{4q^2}}, \quad (53)$$

где

$$c = - \frac{\sqrt[3]{2\beta q} \frac{d}{dy} Ai(y) - Ai(y)(1 - 2p_0)}{\sqrt[3]{2\beta q} \frac{d}{dy} Bi(y) - Bi(y)(1 - 2p_0)},$$

$$y = \left(\frac{1}{\beta} - V_0 \right) \sqrt[3]{\frac{\beta}{4q^2}} \quad (54)$$

и параметр q определен из условия $p(V_c) = 0$.

Значения q даны в табл. 1 или могут быть рассчитаны по аппроксимационной формуле $q = \sum_{k=0}^5 Q_k \beta^k$ (рис. 5; значения коэффициентов Q_k даны в табл. 2). Сопоставление точных и приближенных расчетов представлено

на рис. 2. При больших значениях параметра $\beta > 0.3$ необходимо использовать численные методы, однако в реальных ситуациях такие значения β практически невозможно реализовать.

При расчетах с $\beta \leq 0.1$ можно использовать вместо формулы (49) приближенное выражение

$$z(V) \approx \begin{cases} -\ln \left(1 + \frac{e^V - V_0 - 1}{p_0} \right), & V \leq V_0, \\ \alpha - 0.9611 - 0.2687 \frac{V - V_0}{\beta}, & V > V_0 \end{cases} \quad (55)$$

и тогда для оценки поведения всех требуемых величин будут использоваться только алгебраические формулы (49)–(53). Точность этих формул тем выше, чем меньше значение параметра β .

При значениях параметра энерговклада $\beta \leq 0.0005$ нет необходимости использовать численные методы, поскольку приведенные выше приближенные формулы дают практически точное решение задачи.

Для грубой оценки параметров ударной волны в окрестности точки $z = 0$ можно использовать соответ-

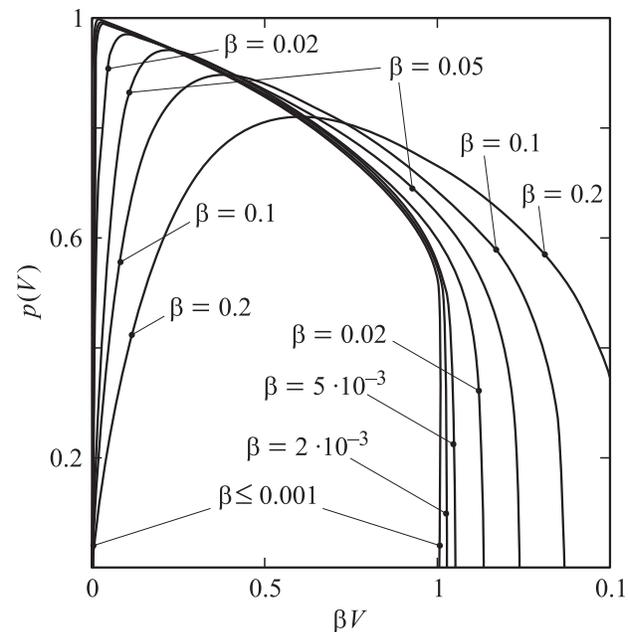


Рис. 5. Зависимость кривых $p(V)$ от βV для различных β .

Таблица 3. Матрица g_{ik} для приближенного расчета $z_{M=1}$ по формуле (55)

i	k		
	0	1	2
0	0.2	-0.707	-0.654
1	-53.054	345.683	-398.894
2	$2.105 \cdot 10^3$	$-1.217 \cdot 10^4$	$1.202 \cdot 10^4$

ствующие формулы из работы [3]:

$$p_2 = p_1 \left[1 + \chi_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\beta M}{\chi_0^2}} \right) \right], \quad \chi_0 = \gamma \frac{M^2 - 1}{\gamma + 1},$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left[\frac{(\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma - 1}{(\gamma - 1) \frac{p_2}{p_1} + \gamma + 1 + \frac{\beta}{\gamma M}} \right], \quad T_2 = \frac{p_2}{\rho_2 R}, \quad (56)$$

где R — газовая постоянная продуктов сгорания.

Как следует из уравнения (33), при прохождении УВ через плазму (т.е. в случае, когда энерговклад ω определяется формулой (45)) поведение решения $p(z)$, а следовательно, поведение всех параметров УВ (40)–(43), определяется только двумя параметрами α и β . Соответственно только от этих параметров зависит и положение точки повторного выхода числа Маха на значение $M(z_{M=1}) = 1$. Приближенно величину $z_{M=1}$ можно вычислить по формуле

$$z_{M=1} \approx -\frac{1}{\beta} \exp \left[\sum_{i=0}^2 \beta^i \sum_{k=0}^2 g_{ik} \alpha^k \right], \quad (57)$$

где коэффициенты g_{ik} приведены в табл. 3.

Удельная энергия ΔH , выделяемая плазмой при прохождении ударной волны, оценивается как произведение энерговклада Q на расстояние $|z_{M=1}|$ (выраженное в

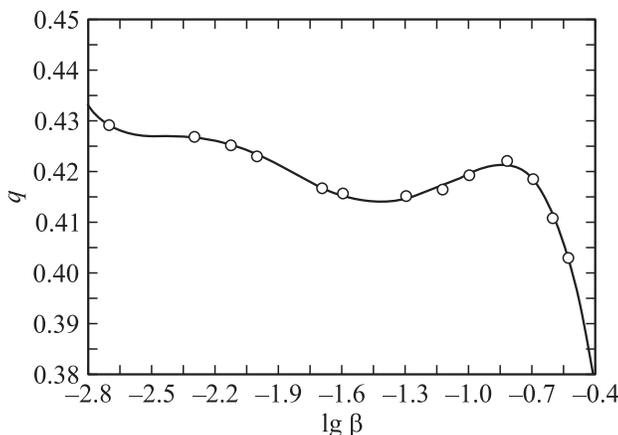


Рис. 6. Зависимость параметра q для приближенных расчетов по формулам (51)–(55) от β .

метрах), деленное на поток $\rho_1 v_1$

$$\Delta H \approx \frac{Q (M \alpha \frac{3\rho_1 a_1 (\gamma + 1)}{8\mu\gamma})^{-1} |z_{M=1}|}{\rho_1 v_1}. \quad (58)$$

Знание ΔH позволяет оценить [4] на основе законов сохранения значение плотности в точке $z_{M=1}$

$$\rho_3 = \frac{\rho_1}{1 + \frac{(\gamma - 1)\Delta H \rho_1}{\gamma p_1} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2\gamma p_1}{(\gamma^2 - 1)\Delta H \rho_1}} \right]}. \quad (59)$$

Поведение плотности в области $z_{M=1} \leq z \leq 0$ близко к линейному, поэтому грубую оценку поведения плотности можно получить линейной аппроксимацией между значениями ρ_2 (56) и ρ_3 (59):

$$\rho_{ap}(z) \approx \begin{cases} \frac{\rho_1}{1 - \alpha(1 + e^{z/\beta})^{-1}}, & z > 0, \\ \rho_2 + \frac{\rho_3 - \rho_2}{z_{M=1}} z, & z \leq 0. \end{cases} \quad (60)$$

Оценку поведения давления, температуры, числа Маха и скорости можно провести по формулам (40)–(42), используя в качестве функции $p(z)$:

$$p_{ap}(z) \approx \begin{cases} (1 + e^{z/\beta})^{-1}, & z > 0 \\ \frac{1}{\alpha} \left[1 - \frac{\rho_1}{\rho_{ap}(z)} \right], & z \leq 0. \end{cases} \quad (61)$$

Сопоставление расчетов давления, плотности, температуры, скорости и числа Маха с использованием приближенных формул (52)–(55) и (58)–(59) для $p(z)$ с результатами численных расчетов приведено на рис. 2.

Заключение

В работе рассмотрены численные и приближенные методы решения уравнения, описывающего скорость ударной волны в активной среде, в которой возможно дополнительное выделение (или поглощение) энергии. Подробно рассмотрен вариант движения ударной волны в плазме и сделаны выводы об основных закономерностях изменения параметров ударной волны.

Список литературы

- [1] Герасимов Н.А., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С., Сухомлинов С.В. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 11–17.
- [2] Уинзем Д. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. 624 с.
- [3] Голятин В.Ю., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 25–30.
- [4] Голятин В.Ю., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 5. С. 52–60.