

# Параметрический генератор гиперболического хаоса на основе двух связанных осцилляторов с нелинейной диссипацией

© А.С. Кузнецов,<sup>1</sup> С.П. Кузнецов,<sup>2</sup> И.Р. Сатаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия

<sup>2</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
410019 Саратов, Россия  
e-mail: spkuz@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 16 февраля 2010 г.)

Рассмотрена схема параметрического генератора хаоса на базе двух связанных осцилляторов с модулированной добротностью, рабочие частоты которых отличаются вдвое, а возбуждение производится импульсами накачки на тройной частоте с периодом следования, равным периоду модуляции добротности. Проанализирована модель, в которой временная эволюция составлена из четырех периодически повторяющихся стадий равной продолжительности. На первой стадии осуществляется параметрическое возбуждение осцилляторов в присутствии нелинейной диссипации, на второй происходит затухание второго осциллятора, на третьей — взаимодействие осцилляторов через квадратичную нелинейность, на четвертой — затухание первого осциллятора. Трансформация фазы колебаний за 4 стадии дается растягивающим отображением окружности. В фазовом пространстве четырехмерного отображения, описывающего изменение состояния за период модуляции, имеет место аттрактор типа Смейла–Вильямса. Представлены результаты численного исследования хаотической динамики, обусловленной присутствием этого аттрактора, и расчетов, подтверждающих его гиперболическую природу на основе известного из математической литературы критерия конусов.

## Введение

В математической теории динамических систем вводятся *однородно гиперболические странные аттракторы*, которые допускают далеко идущий теоретический анализ, обладают сильными хаотическими свойствами и характеризуются структурной устойчивостью, т. е. нечувствительностью к вариациям функций и параметров в определяющих уравнениях [1–7]. Как считалось до недавнего времени, эти аттракторы дают лишь идеализированный „рафинированный“ образ динамического хаоса, не имея отношения к динамике систем физического или технического происхождения. В обзорах и учебниках по нелинейной динамике они традиционно представлены искусственными математическими конструкциями, такими как аттрактор Плькина и солениод Смейла–Вильямса [1–7].

Недавно был предложен принцип построения физических систем с гиперболическими аттракторами, состоящий в манипуляции фазами колебаний при передаче возбуждения между попеременно активными парциальными осцилляторами, с тем чтобы трансформация фаз отвечала итерациям отображения с хаотической динамикой [8–10]. Представляется естественным и уместным для реализации этого принципа использовать известный в теории колебаний и приложениях класс систем с параметрическим возбуждением [11–15], имея в виду возможность разработки на этой основе систем различной физической природы, в том числе в лазерной физике и нелинейной оптике [15].

Одна конкретная схема параметрического генератора хаоса на данном принципе рассмотрена в работе [16]. Она составлена из двух одинаковых подсистем, каждая из которых представлена схемой двухконтурного параметрического генератора, причем осциллятор частоты  $\omega_1$  одной подсистемы связан через квадратичный нелинейный элемент с осциллятором частоты  $\omega_2 = 2\omega_1$  другой. Накачка в подсистемах включается по очереди и осуществляется на частоте  $\omega_3 = 3\omega_1$ , так что выполнено условие параметрического резонанса  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . Численные результаты дают основание полагать, что в широком диапазоне параметров система имеет гиперболический аттрактор, который для отображения Пуанкаре представляет собой вариант солениода Смейла–Вильямса. Однако из-за высокой размерности фазового пространства ( $N_0 = 8$  для отображения Пуанкаре) аккуратной компьютерной проверки условий гиперболичности (так называемого „критерия конусов“ [1–5, 17, 18]) выполнено не было.

В настоящей работе предлагается параметрический генератор с гиперболическим аттрактором, имеющий меньшую размерность фазового пространства. Это дает возможность провести вычисления по проверке критерия конусов и обосновать тем самым гиперболическую природу аттрактора. При конструировании модели использованы приемы и комбинации элементов, известные в контексте лазерной физики и нелинейной оптики (параметрическая связь, накачка, модуляция добротности), что в перспективе позволяет говорить о возможности практической реализации генераторов хаоса на этой основе.

## 1. Исследуемая модель и основные уравнения

Рассмотрим систему, состоящую из двух осцилляторов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = 2\omega_1$ , параметрическое возбуждение которой обеспечивается импульсами накачки на частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$ , следующими друг за другом с периодом  $T \gg 1/\omega_3$ . С тем же периодом  $T$  модулируются добротности осцилляторов, а также коэффициент нелинейной (квадратичной) связи между ними. Для простоты и определенности в конструируемой модели будем рассматривать модуляцию по „прямоугольному“ закону — как мгновенное переключение параметров от одной величины к другой в определенные моменты времени. Иными словами, эволюцию во времени полагаем состоящей из четырех периодически повторяющихся стадий равной продолжительности, составляющей целое число высокочастотных периодов сигнала накачки, т.е.  $T/4 = 2\pi N/\omega_3$ .

На первой стадии производится параметрическое возбуждение системы, обусловленное колебаниями величины реактивной связи между осцилляторами на частоте накачки, и считается присутствующей нелинейная диссипация, обеспечивающая насыщение параметрической неустойчивости. На второй стадии включается диссипация во втором осцилляторе, благодаря чему его колебания затухают. На третьей стадии осуществляется взаимодействие осцилляторов через квадратичную нелинейность, а на четвертой — затухание первого осциллятора. Уравнения, описывающие динамику на всех этих стадиях, зададим в следующем виде.

I. Стадия параметрического возбуждения:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= \kappa y \sin \omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \kappa x \sin \omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3.\end{aligned}\quad (1)$$

II. Стадия затухания второго осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = -\alpha_2 \dot{y}.\quad (2)$$

III. Стадия взаимодействия через квадратичную нелинейность:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = 2\varepsilon xy, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = \varepsilon x^2.\quad (3)$$

IV. Стадия затухания первого осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = -\alpha_1 \dot{x}, \quad \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0.\quad (4)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — обобщенные координаты двух осцилляторов с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Параметр  $\kappa$  определяет интенсивность накачки на частоте  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1$ , а  $\varepsilon$  — нелинейную (квадратичную) связь между осцилляторами. Параметры  $\alpha_{1,2}$  отвечают за линейную, а  $\beta_{1,2}$  — за нелинейную диссипацию соответственно в первом и втором осцилляторах.

Динамику можно представить единой неавтономной системой двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= f_1(t)(\kappa y \sin \omega_3 t - \beta_1 \dot{x}^3) \\ &\quad - \alpha_1 f_4(t)\dot{x} + 2\varepsilon f_3(t)xy, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= f_1(t)(\kappa x \sin \omega_3 t - \beta_2 \dot{y}^3) \\ &\quad - \alpha_2 f_2(t)\dot{y} + \varepsilon f_3(t)x^2,\end{aligned}\quad (5)$$

где  $f_k(t) = 1$ , если  $k - 1 \leq 4\{t/T\} < k$ , и  $f_k(t) = 0$  в противном случае (фигурными скобками обозначена дробная часть числа).

Мгновенное состояние системы в фиксированный момент времени  $t$  задается четырехмерным вектором  $\mathbf{x} = (x, u, y, v)$ , где  $u = \dot{x}/\omega_1$ ,  $v = \dot{y}/\omega_2$  — нормированные обобщенные скорости осцилляторов. Трансформация этого вектора за полный период изменения коэффициентов в уравнениях, т.е. за время от  $t = nT$  до  $t = (n+1)T$ , отвечает *стробоскопическому отображению*, или *отображению Пуанкаре*,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).\quad (6)$$

Выполнение этого отображения можно реализовать в виде компьютерной программы, обеспечивающей решение системы дифференциальных уравнений на периоде  $T$  конечно-разностным методом.

В ситуации, когда период модуляции параметров намного больше периода высокочастотных колебаний,  $N \gg 1$ , можно переформулировать задачу, воспользовавшись методом комплексных амплитуд [12–14]. Для этого полагаем

$$\begin{aligned}x &= ae^{i\omega_1 t} + a^* e^{-i\omega_1 t}, & \dot{x} &= i\omega_1 a e^{i\omega_1 t} - i\omega_1 a^* e^{-i\omega_1 t}, \\ y &= be^{i\omega_2 t} + b^* e^{-i\omega_2 t}, & \dot{y} &= i\omega_2 b e^{i\omega_2 t} - i\omega_2 b^* e^{-i\omega_2 t}.\end{aligned}\quad (7)$$

После подстановки этих выражений в соотношения (1)–(4), умножения уравнений на экспоненту  $e^{-i\omega_1 t}$  (для  $a$ ) и  $e^{-i\omega_2 t}$  (для  $b$ ) и усреднения по периоду быстрых колебаний, с учетом принятого соотношения частот  $\omega_{1,2,3}$ , получаем усредненные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд на четырех стадиях динамики в следующем виде.

Стадия I:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -(\kappa/4\omega_1)b^* - \frac{3}{2}\beta_1\omega_1^2|a|^2a, \\ \dot{b} &= -(\kappa/4\omega_2)a^* - \frac{3}{2}\beta_2\omega_2^2|b|^2b.\end{aligned}$$

Стадия II:

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = -\frac{1}{2}\alpha_2 b.$$

Стадия III:

$$\dot{a} = -i\varepsilon\omega_1^{-1}a^*b, \quad \dot{b} = -\frac{1}{2}i\varepsilon\omega_2^{-1}a^2.$$

Стадия IV:

$$\dot{a} = -\frac{1}{2}\alpha_1 a, \quad \dot{b} = 0.$$

Это можно представить в виде единой системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -(\kappa/4\omega_1)b^*f_1(t) - \frac{3}{2}f_1(t)\beta_1\omega_1^2|a|^2a \\ &\quad - if_3(t)\varepsilon\omega_1^{-1}a^*b - \frac{1}{2}f_4(t)\alpha_1a, \\ \dot{b} &= -(\kappa/4\omega_2)a^*f_1(t) - \frac{3}{2}f_1(t)\beta_2\omega_2^2|b|^2b \\ &\quad - \frac{1}{2}if_3(t)\varepsilon\omega_2^{-1}a^2 - \frac{1}{2}f_2(t)\alpha_2b. \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. Механизм функционирования модели

На первой стадии происходит параметрическая раскачка обоих осцилляторов, в результате которой их амплитуды колебаний нарастают, а фазы оказываются в определенном соотношении. Поясним этот момент. Пусть для простоты диссипация отсутствует. Тогда для комплексных амплитуд имеем уравнения

$$\dot{a} = -\frac{\kappa b^*}{4\omega_1}, \quad \dot{b} = -\frac{\kappa a^*}{4\omega_2}.$$

Их общее решение представляется в виде

$$b = C_+ e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} + C_- e^{-kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}},$$

$$a = -\sqrt{\omega_1/\omega_2}(C_+^* e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} + C_-^* e^{-kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}}),$$

где  $C_+ = Re^{i\varphi}$  и  $C_- = Re^{-i\varphi}$  — комплексные постоянные, определяемые условиями в начале стадии. Второй член затухает, и через некоторое время будет доминировать первый, т. е.

$$b \approx Re^{i\varphi} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}},$$

$$a \approx -\sqrt{\omega_1/\omega_2} Re^{-i\varphi} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}},$$

что соответствует

$$y \approx 2Re^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

и

$$x \approx 2R\sqrt{\omega_1/\omega_2} e^{kt/4\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cos(\omega_1 t - \varphi - \pi).$$

Таким образом, возникшие в результате развития параметрической неустойчивости колебания на первой и второй гармонике основной частоты  $\omega_1$  имеют фазу, определяемую единственной константой  $\varphi$ , которая зависит от начальных условий. При учете нелинейной диссипации амплитуда колебаний будет претерпевать насыщение, но указанное фазовое соотношение сохранится.

На второй стадии осцилляторы не связаны, причем первый совершает незатухающие колебания, а во втором происходит затухание колебаний до некоторого малого уровня, так что при приближенном рассмотрении остаточными колебаниями можно пренебречь. Фаза первого

осциллятора остается приблизительно постоянной, так что  $a \sim -e^{-i\varphi}$  и  $x \sim \cos(\omega_1 t - \varphi - \pi)$ .

На третьей стадии имеет место взаимодействие осцилляторов через квадратичную нелинейность. Второй осциллятор раскачивается под воздействием второй гармоники колебаний первого осциллятора резонансным образом в силу выбранного соотношения частот  $\omega_2 = 2\omega_1$ . Как видно из уравнения  $\dot{b} = -\frac{1}{2}i\varepsilon\omega_2^{-1}a^2$ , если для первого осциллятора  $a \propto -e^{-i\varphi}$ , то будем иметь  $b \propto -ia^2 = -ie^{-2i\varphi}$  и  $y \propto \cos(\omega_2 t - 2\varphi - \pi/2)$ . Таким образом, фаза колебаний второго осциллятора оказывается удвоенной по отношению к исходной, с точностью до знака и постоянного сдвига.

На четвертой стадии колебания первого осциллятора затухают до пренебрежимо малого уровня, тогда как у второго амплитуда не меняется и фаза остается приблизительно постоянной, т. е.  $b \propto -ie^{-2i\varphi}$  и  $y \propto \cos(\omega_2 t - 2\varphi - \pi/2)$ . По окончании стадии этим определяются начальные условия для новой стадии параметрического возбуждения.

Новые значения коэффициентов в выражении для решения, определяющего нарастание колебаний на очередной стадии параметрического возбуждения,  $C'_+$  и  $C'_-$ , получаются из соотношений  $b = C'_+ + C'_- \propto -ie^{-2i\varphi}$ ,  $a \approx C'_+ = C'_- \approx 0$ . Таким образом,  $C'_+ = R'e^{i\varphi'} \propto -ie^{-2i\varphi}$ , а это значит, что между новым и старым значениями  $\varphi$  имеется соотношение

$$\varphi' = -2\varphi - \pi/2. \quad (9)$$

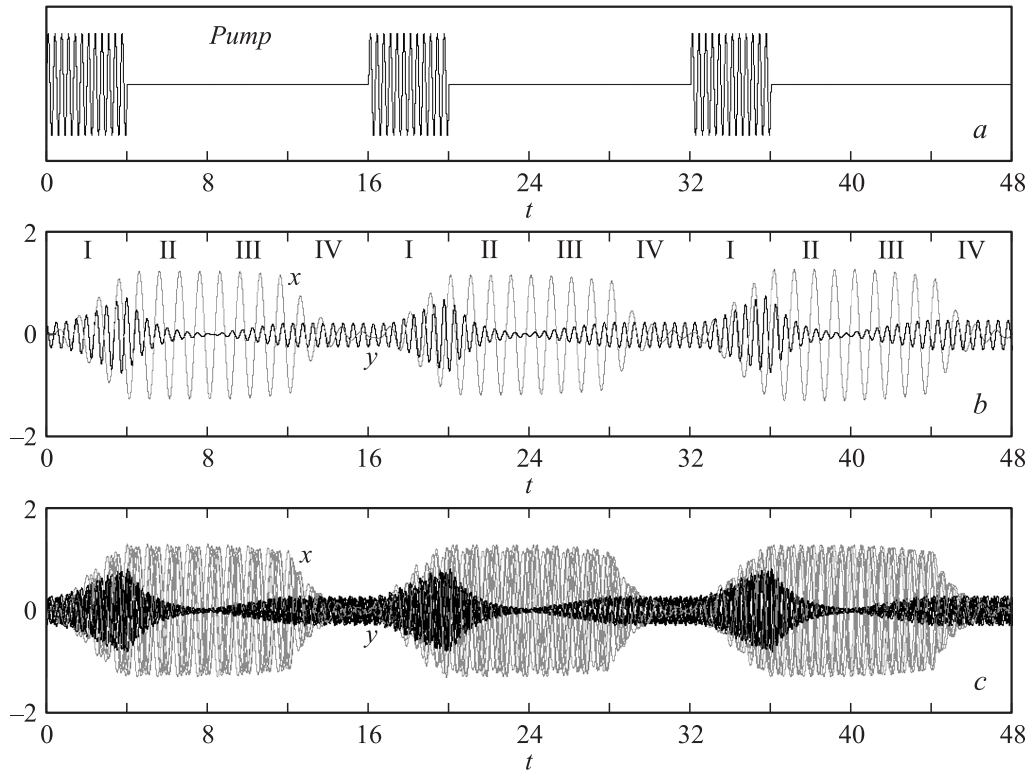
Итак, преобразование состояния системы за полный период, содержащий четыре стадии, отвечает растягивающему вдвое отображению для фазы. Оно относится к классу растягивающих отображений окружности, которые называют также отображениями типа Бернулли, и характеризуется хаотическим поведением. За один шаг возмущение переменной  $\varphi$  умножается на 2, так что присутствует положительный показатель Ляпунова  $\Lambda = \ln 2$ .

На каждой итерации отображения Пуанкаре, описывающего эволюцию системы за период изменения коэффициентов, в фазовом пространстве имеет место растяжение в два раза вдоль циклической координаты, ассоциирующейся с фазовой переменной  $\varphi$ , и сжатие по остальным направлениям. Это соответствует, как можно предположить, наличию аттрактора типа Смейла–Вильямса в отображении Пуанкаре.

## 3. Численные результаты

Обратимся к результатам численного моделирования динамики системы. Удобно принять  $\omega_1 = 2\pi$ ,  $\omega_2 = 4\pi$ ,  $\omega_3 = 6\pi$ , что соответствует выбору периода собственных колебаний первого осциллятора за единицу времени.

На рис. 1 приводятся типичные образцы временных зависимостей в установившемся режиме параметрической итерации, полученные в результате решения уравнений (5) на компьютере конечно-разностным методом



**Рис. 1.** График зависимости от времени сигнала накачки (*a*) и сигналов, порождаемых составляющими систему осцилляторами в режиме установившихся колебаний (*b*). Римскими цифрами обозначены четыре стадии эволюции. Присутствие хаоса проявляется в том, что фаза заполнения в последовательно формирующихся импульсах генерации изменяется нерегулярным образом, как видно при наложении на одном графике нескольких реализаций процесса (*c*).

при задании следующих параметров:

$$T = 16, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1.6, \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.02, \\ \varepsilon = 2.2, \quad \kappa = 25. \quad (10)$$

Представлен интервал времени (см. рис. 1), содержащий три периода модуляции накачки, график сигнала которой показан на верхней диаграмме (*a*). Как можно видеть из рис. 1, *b*, каждый из двух осцилляторов, составляющих систему, выдает сигнал в виде импульсов, имеющих высокочастотное заполнение и следующих с периодом модуляции накачки. Однако сигнал в целом неперiodический: фаза высокочастотного заполнения изменяется от импульса к импульсу хаотически. Это хорошо видно из диаграммы (*c*), где на одном графике наложены несколько последовательных участков реализации.

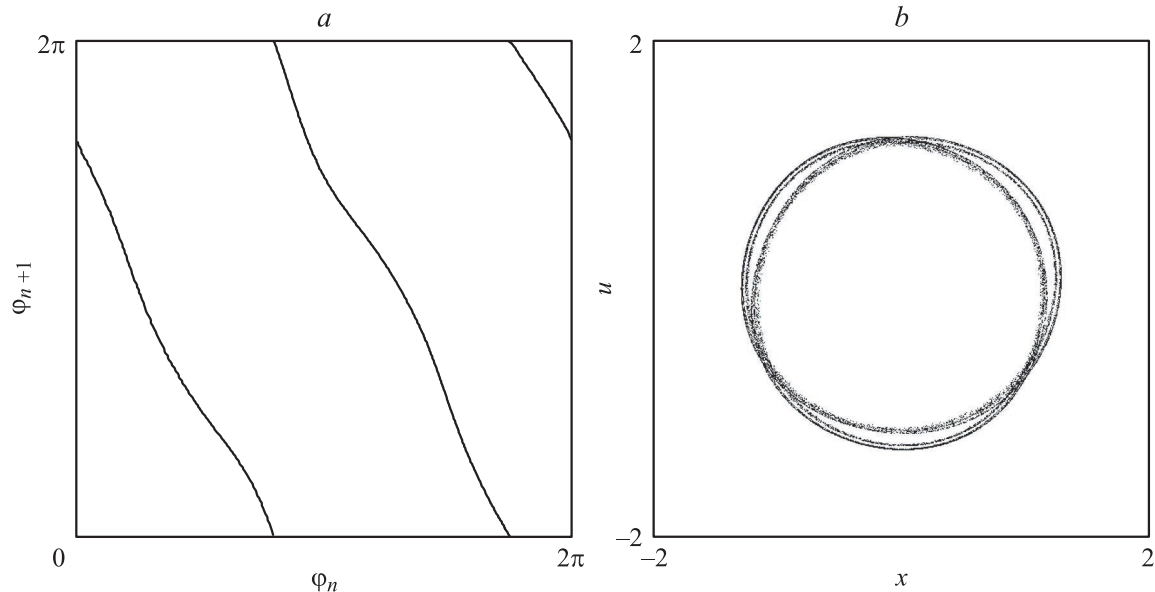
На рис. 2, *a* показана полученная при численном решении уравнений (5) итерационная диаграмма для фаз, отвечающих моментам выключения импульсов накачки. Значения фазы вычисляются для первого осциллятора по формуле  $\varphi = \arg(x - iu)$  и приводятся к интервалу  $[0, 2\pi)$ . Вид диаграммы для фаз хорошо согласуется с качественным описанием в предыдущем разделе. Изменение фазы колебаний за полный цикл смены стадий приближенно описывается растягивающим отображением окружности. В самом деле, из рисунка хорошо

видно, что один полный обход окружности отвечает двум оборотам (в обратном направлении) для точки-образа. На рис. 2, *b* представлен портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость первого осциллятора ( $x, u$ ), который по виду соответствует ожидаемому соленоиду типа Смейла–Вильямса. На рисунке заметна характерная для такого аттрактора тонкая поперечная фрактальная структура. Проверка гиперболической природы аттрактора на основе известного из математической литературы критерия конусов описана ниже.

Чтобы получить свидетельство присутствия хаоса на количественном уровне, обратимся к расчету показателей Ляпунова. Для этого используем стандартную методику Бенеттина [19,20]. Приводится совместное решение уравнений (5) и четырех комплектов уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \omega_1^2 \tilde{x} &= f_1(t)(\kappa \tilde{y} \sin \omega_3 t - 3\beta_1 \dot{x}^2 \tilde{x}) \\ &\quad - \alpha_1 f_4(t) \dot{\tilde{x}} + 2\varepsilon f_3(t)(\tilde{x}\tilde{y} + x\tilde{y}), \\ \ddot{\tilde{y}} + \omega_2^2 \tilde{y} &= f_1(t)(\kappa \tilde{x} \sin \omega_3 t - 3\beta_2 \dot{y}^2 \tilde{y}) \\ &\quad - \alpha_2 f_2(t) \dot{\tilde{y}} + 2\varepsilon f_3(t)x\tilde{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Каждый раз после определенного числа шагов разностной схемы при решении уравнений выполняются ор-



**Рис. 2.** Итерационная диаграмма для фаз колебаний первого осциллятора в конце стадии параметрического возбуждения (а) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (стробоскопическом сечении), отвечающем тем же моментам времени (b).

тогонализация Грама—Шмидта и нормализация для векторов возмущения  $\{\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{y}, \tilde{v}\}$ , где  $\tilde{u} = \dot{\tilde{x}}/\omega_1$ ,  $\tilde{v} = \dot{\tilde{y}}/\omega_2$ . Показатели Ляпунова определяются как средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов от норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Полный спектр показателей Ляпунова для аттрактора, реализующегося при значениях параметров (10), согласно результатам расчетов, следующий:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0.0402, & \lambda_2 &\approx -0.0631, \\ \lambda_3 &\approx -0.559, & \lambda_4 &\approx -0.675. \end{aligned} \quad (12)$$

Для отображения Пуанкаре показатели Ляпунова выражаются через величины (12) соотношением  $\Lambda_k = \lambda_k T$ . Отсюда получаем  $\Lambda_1 = 0.643$ , что удовлетворительно согласуется с оценкой  $\Lambda \approx \ln 2 = 0.693 \dots$ , получаемой при приближенном описании эволюции фазовой переменной одномерным отображением Бернулли (9).

Наличие положительного показателя  $\Lambda_1$  служит количественным подтверждением присутствия хаоса. Остальные показатели  $\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4$  отрицательные. Отсюда следует, что элемент фазового объема претерпевает растяжение по одному направлению и сжатие — по трем остальным направлениям в фазовом пространстве отображения Пуанкаре. Размерность аттрактора в отображении Пуанкаре, оцененная по известной формуле Каплана—Йорке [20,21], составляет  $D = 1 + \Lambda_1/|\Lambda_2| \approx 1.64$ .

#### 4. Численные результаты в рамках метода медленных амплитуд

Уравнения, полученные в разд. 2 для комплексных амплитуд, можно рассматривать не только как при-

ближение для исходной системы (5), но также и как самостоятельный объект исследования. Именно такая формулировка выявляет универсальную природу модели: присутствующие комбинации комплексных амплитуд и сопряженных величин характерны для уравнений, описывающих параметрические системы различной физической природы. Заметим, что количество существенных параметров в этой формулировке меньше, чем в исходных уравнениях, поскольку абсолютное значение основной частоты  $\omega_1$  более не фигурирует, кроме как в комбинации с другими параметрами. Уравнения можно переписать в виде

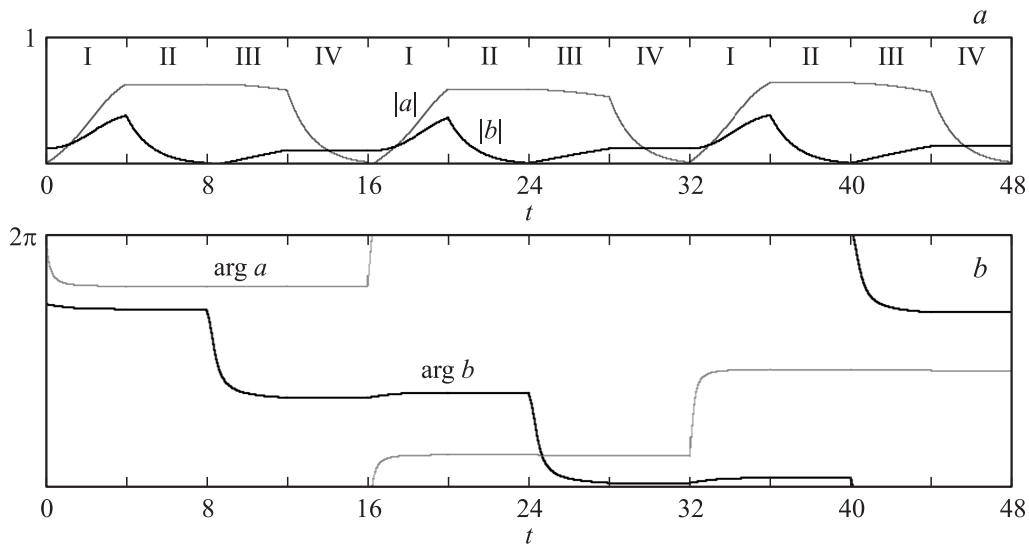
$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\bar{\kappa} b^* f_1(t) - \frac{3}{2} f_1(t) \bar{\beta}_1 |a|^2 a \\ &\quad - i f_3(t) \bar{\varepsilon} a^* b - \frac{1}{2} f_4(t) \alpha_1 a, \\ \dot{b} &= -\frac{1}{2} \bar{\kappa} a^* f_1(t) - \frac{3}{2} f_1(t) \bar{\beta}_2 |b|^2 b \\ &\quad - \frac{1}{4} i f_3(t) \bar{\varepsilon} a^2 - \frac{1}{2} f_2(t) \alpha_2 b, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\bar{\kappa} = \kappa/4\omega_1$ ,  $\bar{\beta}_{1,2} = \beta_{1,2}\omega_{1,2}^2$ ,  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\omega_1$ .

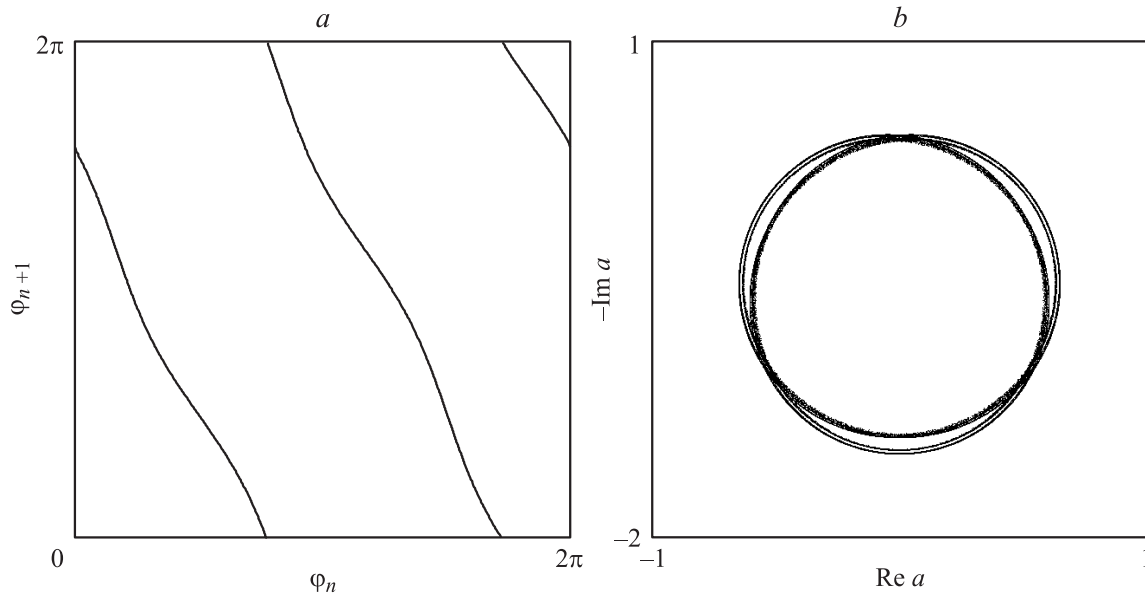
Выберем параметры так, чтобы иметь соответствие режиму, обсуждавшемуся в предыдущем разделе, а именно

$$\begin{aligned} T &= 16, & \alpha_1 &= \alpha_2 = 1.6, & \beta_1 &= 0.7896, & \beta_2 &= 3.1583, \\ \varepsilon &= 0.3501, & \kappa &= 0.9947. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 3 приводятся временные зависимости для амплитуд и фаз комплексных переменных  $a$  и  $b$ , полученные путем численного решения уравнений (13). Как



**Рис. 3.** Графики зависимости от времени амплитуд (*a*) и фаз (*b*) комплексных переменных для двух составляющих систему осцилляторов, полученные при численном решении уравнений (13). Римскими цифрами обозначены стадии эволюции.



**Рис. 4.** Итерационная диаграмма для фаз колебаний первого осциллятора в конце стадии параметрического возбуждения (*a*) и портрет аттрактора в сечении Пуанкаре (*b*), полученные путем численного решения уравнений для комплексных амплитуд (13).

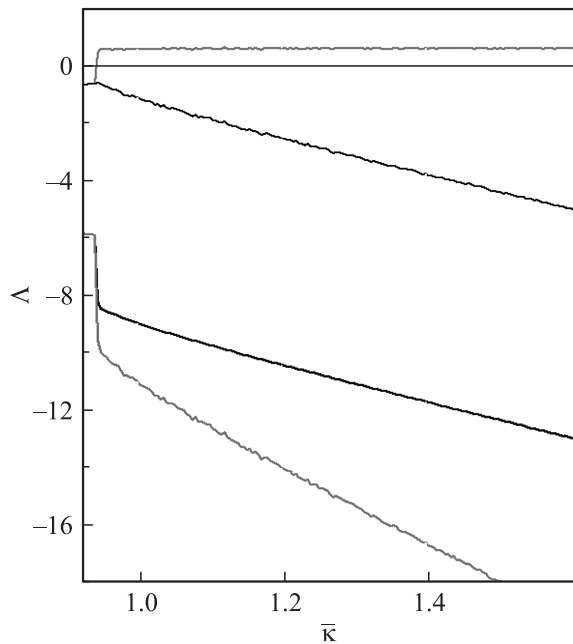
можно видеть, ход зависимостей амплитуд от времени соответствует огибающей для графиков колебаний двух осцилляторов на рис. 1, *a*. Зависимость фаз от времени носит нерегулярный характер. Как можно убедиться, фаза трансформируется за период повторения стадий в хорошем соответствии с отображением типа Бернулли. Это видно из диаграммы для фаз, приведенной на рис. 4, *a*, которую следует сравнить с рис. 2, *a*. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре представлен на рис. 4, *b* и демонстрирует очевидное соответствие с рис. 2, *b*.

Расчет показателей Ляпунова для рассматриваемого режима по методу Бенеттина [19,20] на основе решения уравнений для медленных амплитуд, дополненных

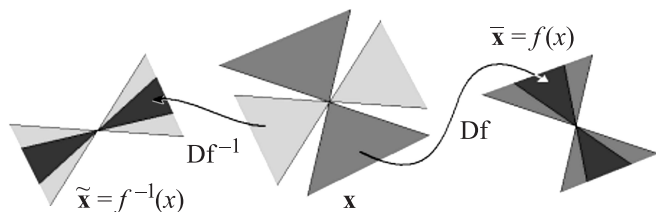
соответствующими линеаризованными уравнениями для малых возмущений фазовой траектории, дает спектр показателей Ляпунова

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 0.0413, & \lambda_2 &\approx -0.0656, \\ \lambda_3 &\approx -0.558, & \lambda_4 &\approx -0.685, \end{aligned} \quad (15)$$

что находится в хорошем соответствии с результатом (12). Заметим, что старший показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре  $\Lambda_1 = \lambda_1 T \approx 0.661$  близок к величине  $\ln 2$ , отвечающей приближенному описанию динамики фазы отображением типа Бернулли.



**Рис. 5.** Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре в зависимости от параметра интенсивности накачки для системы (13) при  $T = 16$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.6$ ,  $\beta_1 = 0.7896$ ,  $\beta_2 = 3.1583$ ,  $\varepsilon = 0.3501$ .



**Рис. 6.** К пояснению критерия гиперболичности. Для точки  $x$  образ расширяющегося конуса располагается внутри расширяющегося конуса, определенного для точки-образа  $\bar{x} = f(x)$ , а прообраз сжимающегося конуса — внутри сжимающегося конуса для точки-прообраза  $\tilde{x} = f^{-1}(x)$ . Символы  $Df$  и  $Df^{-1}$  обозначают матричные производные прямого и обратного отображения, задающие преобразование векторов возмущения при шаге вперед и назад во времени.

На рис. 5 представлен график зависимости показателей Ляпунова для отображения Пуанкаре от параметра интенсивности накачки  $\bar{k}$ . Как можно видеть из графика, старший показатель Ляпунова в широком интервале по параметру остается почти постоянным, близким к величине  $\ln 2$ . Такой характер зависимости находится в соответствии с предполагаемым наличием у системы структурно устойчивого гиперболического аттрактора.

### 5. Проверка гиперболичности аттрактора

Существует обоснованный на уровне математической теоремы и допускающий проверку в численных рас-

четах критерий гиперболичности — критерий конусов [1–5,17,18]. Для рассматриваемой здесь системы его следует применить к отображению Пуанкаре (6)  $\bar{x} = f(x)$ . Критерий требует, чтобы при некотором выборе константы  $\gamma > 1$  для каждой точки  $x$  на аттракторе в пространстве векторов инфинитезимальных возмущений (касательном пространстве) можно было определить расширяющийся и сжимающийся конусы. Расширяющийся конус есть множество векторов инфинитезимальных возмущений, норма которых в результате применения отображения  $\bar{x} = f(x)$  увеличивается в  $\gamma$  и более раз. Сжимающийся конус есть множество векторов, норма которых увеличивается в  $\gamma$  раз и более при действии обратного отображения  $x = f^{-1}(\bar{x})$ . Имея в виду гладкую зависимость всех рассматриваемых объектов от положения исходной точки в фазовом пространстве, говорят о полях расширяющихся и сжимающихся конусов. Эти конусы должны быть инвариантны в том смысле, что для всех точек  $x$  образ расширяющегося конуса обязан располагаться внутри расширяющегося конуса, определенного для точки-образа, а прообраз сжимающегося конуса — внутри сжимающегося конуса для точки-прообраза, как иллюстрируется схематически на рис. 6.

Примеры компьютерной проверки критерия конусов и некоторые детали вычислительных приемов приведены в работах [17,18,22,23].

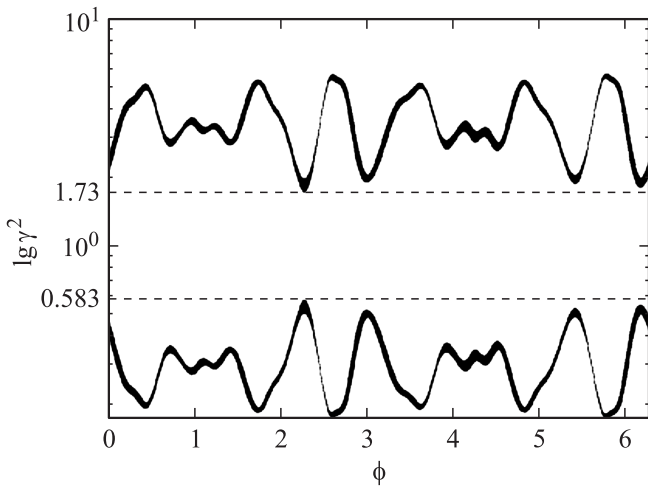
В нашем конкретном случае при итерациях отображения Пуанкаре  $x_{n+1} = f(x_n)$  в четырехмерном пространстве состояний имеет место растяжение в направлении, которое связано с фигурирующей в приближенном уравнении (9) фазой, и сжатие по трем остальным направлениям. Интерпретируя действие отображения геометрически, с учетом цикличности по фазовой переменной, можно вообразить тороид в четырехмерном пространстве<sup>1</sup> и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем в виде двойной петли внутрь исходной области. Это в точности соответствует конструкции Смейла–Вильямса, хотя в данном случае размерность фазового пространства отображения на единицу больше минимально необходимой размерности три.

Упомянутый тороид представляет собой поглощающую область. Это значит, что при действии отображения  $f$  образы точек данной области  $U$  попадают внутрь этой же области:  $f(U) \subset \text{Int } U$ . Собственно аттрактор можно определить как пересечение образов исходной области, получаемых при многократном применении отображения

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(U).$$

Если сформулированные условия вложения конусов выполнены во всей поглощающей области, то гарантирована их справедливость и для всех траекторий на аттракторе.

<sup>1</sup> Имеется в виду область, топологически соответствующая прямому произведению одномерной окружности и трехмерного шара.



**Рис. 7.** Диаграмма, иллюстрирующая результаты проверки гиперболической природы аттрактора в отображении Пуанкаре системы уравнений (5) при значениях параметров, заданных согласно (8).

Расчеты по проверке критерия гиперболичности проводились применительно к системе, определенной уравнениями (5), при задании параметров

$$\begin{aligned} \omega_1 = 2\pi, \quad \omega_2 = 4\pi, \quad \omega_3 = 6\pi, \quad T = 16, \quad \kappa = 30, \\ \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = 0.02, \quad \beta_2 = 0.02, \quad \varepsilon = 2.2. \end{aligned} \quad (16)$$

В соотношении

$$\left( \frac{\sqrt{x^2 + u^2} - r}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{d} \right)^2 + \left( \frac{v}{d} \right)^2 \leq 1, \quad (17)$$

которое определяет поглощающую область  $U$ , значения констант были подобраны эмпирически из численных расчетов:

$$r = 1.49, \quad D = 0.06, \quad d = 0.025. \quad (18)$$

Поглощающую область (17) можно параметризовать тремя углами  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  и радиальной переменной  $\rho \in [0, r]$  согласно соотношениям

$$\begin{aligned} x = (\rho D \cos \theta + r) \sin \varphi, \quad u = (\rho D \cos \theta + r) \cos \varphi, \\ y = \rho d \sin \theta \cos \psi, \quad v = \rho d \sin \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (19)$$

Для проведения вычислений поглощающая область покрывается четырехмерной сеткой с достаточно мелким шагом, в узлах которой проверяется выполнение требуемых условий вложения конусов. Для этого используются матрицы размера  $4 \times 4$ , построенные путем решения на периоде  $T$  четырех комплектов уравнений в вариациях (11) совместно с уравнениями (5). Неравенства, подлежащие проверке, формулируются в терминах квадратичных форм, коэффициенты которых выражаются через элементы упомянутых матриц [17,18].

Сначала проверка производится при  $\gamma^2 = 1$ , а затем, если результат положительный, определяются максимальное и минимальное значения  $\gamma^2$ , при которых еще сохраняется требуемое критерием расположение конусов. Затем находится величина  $\gamma_m^2 = \min(\gamma_{\max}^2, 1/\gamma_{\min}^2)$  и интервал  $\Delta(x) = (\gamma_m^{-2}, \gamma_m^2)$ , где справедливы одновременно оба условия — для расширяющихся и сжимающихся конусов.

В пространстве параметров  $(\gamma^2, R, \theta, \psi, \varphi)$  края интервалов  $\Delta(x)$  задают две гиперповерхности, показанные на рис. 7 в проекции на плоскость  $(\varphi, \gamma^2)$ , где  $\varphi$  — угловая координата вдоль меридиана тороида. (Согласно численным расчетам, зависимость величины  $\gamma_m^2$  от остальных переменных  $R, \theta, \psi$  слабая.) Признаком гиперболичности служит наличие зазора между двумя присутствующими на диаграмме множествами в виде утолщенных кривых. Как следует из полученных результатов, при выборе фигурирующего в формулировке критерия параметра растяжения (сжатия) в интервале  $1 < \gamma^2 < 1.73$ , требуемые условия вложения конусов выполнены во всей поглощающей области  $U$ , и следовательно, аттрактор однородно гиперболический.

## Заключение

В настоящей работе введена в рассмотрение схема параметрического генератора хаоса на базе двух связанных осцилляторов с модулированной добротностью, возбуждаемых импульсами накачки с периодом следования, равным периоду модуляции добротности. Система генерирует колебания в виде последовательности импульсов, фаза заполнения которых изменяется хаотически. В четырехмерном отображении, описывающем динамику стробоскопически, имеет место гиперболический странный аттрактор, представляющий собой вариант соленида Смейла–Вильямса. В отличие от параметрического генератора хаоса, обсуждавшегося в работе [16], рассмотренная схема обладает меньшей размерностью фазового пространства, что дало возможность провести компьютерную проверку известного из математической литературы критерия и представить надежное обоснование гиперболической природы аттрактора.

В силу того что схема использует приемы и комбинации элементов, хорошо известные и отработанные в лазерной физике и нелинейной оптике (параметрическая связь, накачка, модуляция добротности), представляется реальной возможность практического создания устройств на этой основе. Такого рода системы могут представлять интерес как генераторы хаоса, в том числе для применения в схемах скрытой коммуникации [24–26]. Выигрышный момент видится в том, что хаос выражается в случайном изменении фазы заполнения последовательности импульсов. Как можно полагать, это позволит реализовать схемы коммуникации на основе хаоса, в которых передача сигнала в канале связи будет гораздо менее чувствительной к помехам, потерям и искажениям, нежели в предложенных до сих пор



вариантах. (По аналогии с известным в традиционной радиотехнике преимуществом частотной или фазовой модуляции в сравнении с амплитудной).

Существенное преимущество систем с гиперболическими аттракторами с практической точки зрения будет состоять в присущей им структурной устойчивости, или грубости, что означает нечувствительность свойств генерируемого хаоса по отношению к вариациям параметров и характеристик элементов устройства, техническим флуктуациям и т. п.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках Программы развития научного потенциала высшей школы № 2.1.1/1738. С.П.К. отмечает поддержку гранта РФФИ №09-02-00707. И.Р.С. отмечает поддержку гранта РФФИ № 09-02-00426.

Авторы выражают благодарность Л.А. Мельникову за обсуждение и поддержку работы.

## Список литературы

- [1] *Синай Я.Г.* Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 192.
- [2] Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники / Под ред. Р.В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. Т. 2. 310 с.
- [3] *Shilnikov L.* // Int. J. Bifurkation and Chaos. 1997. Vol. 7. P. 353.
- [4] *Каток А.Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 464 с.
- [5] *Afraimovich V. and Hsu S.-B.* Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI, Somerville, MA: Int. Press, 2003. 353 p.
- [6] *Гукенхеймер Дж., Холмс П.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 559 с.
- [7] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 544 с.
- [8] *Kuznetsov S.P.* // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. P. 144 101.
- [9] *Кузнецов С.П., Селезнев Е.П.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. С. 400.
- [10] *Kuznetsov S.P., Pikovsky A.* // Physica D. 2007. Vol. 232. P. 87.
- [11] *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 512 с.
- [12] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 2001. 560 с.
- [13] *Люиселл У.* Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: ИЛ, 1963. 352 с.
- [14] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 315 с.
- [15] *Хохлов Р.В., Ахманов С.А.* // УФН. 1966. Т. 88. № 3. С. 439.
- [16] *Кузнецов С.П.* // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. № 2. С. 438.
- [17] *Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14. № 5. С. 3.

- [18] *Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 365. P. 97.
- [19] *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M.* // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
- [20] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
- [21] *Kaplan J.L., Yorke J.A.* Lecture Notes in Mathematics. Vol. 730 / Eds H.O. Peitgen and H.O. Walthers. Berlin; N Y: Springer, 1979. P. 204–227.
- [22] *Кузнецов С.П.* // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. С. 403–424.
- [23] *Kuznetsov S.P.* // Chaos. 2009. Vol. 19. N 1. P. 013 114.
- [24] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
- [25] *Argyris A., Syvridis D., Larger L. et al.* // Nature. 2005. Vol. 438. P. 343.
- [26] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. С. 1281.